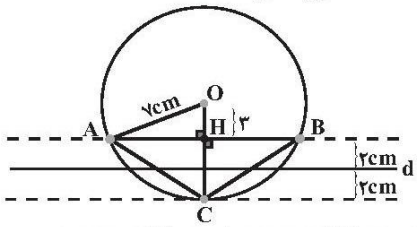
پاسخنامه
ریاضی
هندسه

www.mapedu.ir

کانون
فرهنگی
آموزش
قلم چی

1 – گزینهٔ «۳» *(سعید عزیزقانی)*

دو خط به موازات خط d با فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از آن (بالا و پایین آن) رسم می‌کنیم. هم‌چنین دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O و شعاع ۷ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. محل برخورد آن دو خط و دایره را مشخص کرده و A و B و C می‌نامیم. شکل حاصل یک مثلث است. مثلث ABC متساوی‌الساقین است.



ارتفاع آن برابر $CH=۴$ است. قاعدهٔ آن ضلع AB است که داریم:

$$AB=۲AH$$

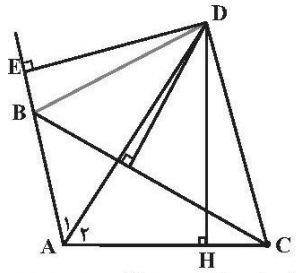
مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH را رسم می‌کنیم و با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس اندازهٔ AH را به‌دست می‌آوریم.

$$OA^۲=AH^۲+OH^۲\Rightarrow ۴۹=AH^۲+۹$$
$$\Rightarrow AH^۲=۴۰\Rightarrow AH=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}$$
$$AB=۲AH=۲\times ۲\sqrt{۱۰}=۴\sqrt{۱۰}$$
$$S_{ABC}=\frac{AB\times CH}{۲}=\frac{۴\sqrt{۱۰}\times ۴}{۲}=۸\sqrt{۱۰}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

2 – گزینهٔ «۱» *(سهیل حسن‌خان‌پور)*

ابتدا از D بر AC و امتداد AB عمود می‌کنیم. چون D روی نیمساز A قرار دارد، پس $DH=DE$.



حال از D به B و C وصل می‌کنیم. چون D روی عمود منصف BC قرار دارد، پس $BD=CD$.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}=\hat{H}=۹۰\\ BD=CD\\ DE=DH\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}}\overset{\Delta}{BDE}\cong\overset{\Delta}{DCH}\rightarrow BE=CH$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}\ \text{نیمساز}\ AD\Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{A}_۲\\ AD=AD\\ \hat{E}=\hat{H}=۹۰^\circ\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}}\overset{\Delta}{AED}\cong\overset{\Delta}{ADH}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}AE=AH\\ AE=AB+BE\\ AH=AC-CH\\ BE=CH\end{cases}$$

$$\Rightarrow AB+CH=AC-CH$$
$$\Rightarrow ۶+CH=۱۰-CH\Rightarrow CH=۲\Rightarrow AH=۱۰-۲=۸$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

3 – گزینهٔ «۱» *(سهیل حسن‌خان‌پور)*

باید سعی کنیم به کمک خواص کسرها، عبارت‌های داده شده را بسازیم. ابتدا صورت و مخرج کسر سمت راست را دو برابر می‌کنیم و سپس صورت و مخرج تمام کسرها را با هم جمع می‌کنیم.

$$K=\frac{۲x-y}{۵}=\frac{۴y+۳z}{۳}=\frac{۲x-۲z}{۸}$$
$$\frac{(۲x-y)+(۴y+۳z)+(۲x-۲z)}{۵+۳+۸}\quad\frac{۴x+۳y+z}{۱۶}\ (۱)$$

این بار دو کسر سمت چپ را در ۲ ضرب می‌کنیم:

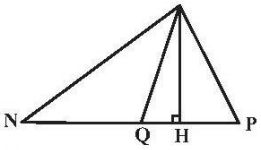
$$K=\frac{۴x-۲y}{۱۰}=\frac{۸y+۶z}{۶}=\frac{x-z}{۴}$$
$$\frac{(۴x-۲y)+(۸y+۶z)+(x-z)}{۱۰+۶+۴}\quad\frac{۵x+۶y+۵z}{۲۰}\ (۲)$$
$$(۱)\ \text{و}\ (۲)\Rightarrow\frac{۴x+۳y+z}{۱۶}=\frac{۵x+۶y+۵z}{۲۰}$$
$$\Rightarrow A=\frac{۴x+۳y+z}{۵x+۶y+۵z}=\frac{۱۶}{۲۰}=\frac{۴}{۵}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

---

4 – گزینهٔ «۴» *(سهیل حسن‌خان‌پور)*

در شکل زیر ارتفاع MH برای مثلث‌های MPQ، MNQ و MNP مشترک است، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌ها می‌شود.



$$\frac{S_{MNQ}}{S_{MPQ}}=\frac{NQ}{PQ},\frac{S_{MPQ}}{S_{MNP}}=\frac{PQ}{NP},\frac{S_{MNQ}}{S_{MNP}}=\frac{NQ}{NP}$$

با توجه به نکته فوق در شکل سوال، G وسط BC است، پس داریم:

$$S_{ABG}=S_{ACG}\Rightarrow\frac{S_{ABG}}{S_{ACG}}=\frac{BG}{CG}=۱$$
$$۳AD=AC\Rightarrow\frac{S_{ADG}}{S_{ACG}}=\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{۳}$$
$$۲AF=FG\Rightarrow ۳FG=۲AG\Rightarrow\frac{FG}{AG}=\frac{۲}{۳}$$
$$\frac{S_{GFD}}{S_{AGD}}=\frac{۲}{۳}$$
$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\frac{S_{GFD}}{S_{ACG}}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۹}\\ \frac{BE}{AB}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{S_{BEG}}{S_{ABG}}=\frac{BE}{AB}=\frac{۱}{۴}\\ S_{ABG}=S_{ACG}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{S_{GFD}}{S_{BEG}}=\frac{\frac{۲}{۹}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۸}{۹}$$

توجه: این سؤال با توجه به مطالب فعالیت صفحهٔ ۳۴ کتاب ریاضی یازدهم تجربی طرح شده است.

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

5 – گزینهٔ «۳» *(اکبر کلاه‌ملکی)*

با توجه به شکل داریم:

$$EF=\frac{AB+DC}{۲}=\frac{۵+۳}{۲}=۴\ ,\ EM=\frac{AB}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow MF=EF-EM=۴-\frac{۳}{۲}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

یادآوری می‌شود که خطی که وسط دو ساق ذوزنقه را به‌هم وصل می‌کند موازی دو قاعده بوده و اندازهٔ آن برابر میانگین دو قاعده است.

همچنین خطی که وسط دو ضلع یک مثلث را به‌هم وصل می‌کند، موازی قاعده بوده و اندازهٔ آن برابر نصف قاعده است.

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۳ تا ۴۱)

---

6 – گزینهٔ «۳» *(سروش موئینی)*

طبق فرض، چهارضلعی پایینی، ذوزنقه است، یعنی $MN \parallel BC$، پس مثلث‌های AMN و ABC متشابه‌اند. بنابراین:

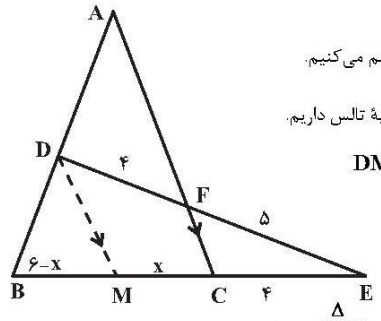
$$\frac{S_{\text{ذوزنقه}}}{S_{\text{کل}}}=\frac{۸۴}{۱۰۰}=\frac{۲۱}{۲۵}\Rightarrow\frac{S_{\text{مثلث}}}{S_{\text{کل}}}=\frac{۴}{۲۵}$$

پس $k^۲=\frac{۴}{۲۵}$ و در نتیجه نسبت تشابه $k=\frac{۲}{۵}$ است. پس نسبت محیط‌های دو مثلث هم $\frac{۲}{۵}=۰/۴$ است.

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

---

7 – گزینهٔ «۲» *(مهدی براتی)*



ابتدا DM را موازی AC رسم می‌کنیم.

در مثلث $\overset{\Delta}{DEM}$ بنابر قضیهٔ تالس داریم:

$$DM \parallel FC \Rightarrow \frac{CE}{CM}=\frac{EF}{DF}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{x}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow x=\frac{۱۶}{۵}$$

سپس قضیهٔ تالس را در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ می‌نویسیم:

$$DM \parallel AC \Rightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{MC}{BM}=\frac{x}{۶-x}=\frac{\frac{۱۶}{۵}}{\frac{۱۴}{۵}}=\frac{۸}{۷}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۳ تا ۴۱)

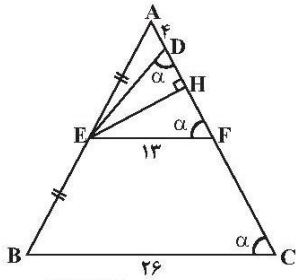
---

8 – گزینهٔ «۴» *(سید جواد نظری)*

ابتدا از نقطهٔ E خطی موازی BC بر AC وارد کرده و پای آن را F می‌نامیم حال طبق قضیهٔ تالس در مثلث ABC داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC}: EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB=۲AE \quad (*) \\ EF=\frac{BC}{۲}=۱۳ \\ AF=\frac{AC}{۲}=۱۴\Rightarrow DF=AF-AD=۱۰ \end{cases}$$



حال با توجه به خطوط موازی و مورب، چون $EF \parallel BC$ است، پس:

$$A\hat{F}E=A\hat{C}B \xrightarrow[\text{فرض سوال}]{A\hat{C}B=C\hat{D}E} A\hat{F}E=C\hat{D}E$$

بنابراین مثلث EDF با رأس E متساوی‌الساقین است، پس $EF=ED=۱۳$؛ حال در این مثلث ارتفاع وارد بر قاعده DF را رسم می‌کنیم و می‌دانیم که این ارتفاع میانه نیز هست، پس:

$$DH=HF=\frac{DF}{۲}=۵$$

از طرفی در دو مثلث قائم‌الزاویه EHD و AEH طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$ED^۲=EH^۲+DH^۲\Rightarrow ۱۶۹=EH^۲+۲۵\rightarrow EH^۲=۱۴۴$$

$$AE^۲=AH^۲+EH^۲\Rightarrow AE=\sqrt{۸۱+۱۴۴}=\sqrt{۲۲۵}=۱۵$$

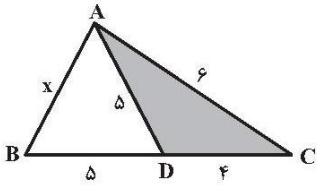
$$\xrightarrow{(*)} AB=۲AE\Rightarrow AB=۲\times۱۵=۳۰$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۳ تا ۴۱)

9 – گزینهٔ «۱» *(علی ساوجی)*

دو مثلث ABC و ADC به حالت دو ضلع و زاویه بین متشابه‌اند زیرا:

$$\begin{cases} \frac{BC}{AC}=\frac{۹}{۶}=\frac{۳}{۲} \\ \frac{AC}{DC}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲} \end{cases}\Rightarrow \frac{BC}{AC}=\frac{AC}{DC}=\frac{۳}{۲}$$



همچنین زاویهٔ $\hat{C}$ در دو مثلث مشترک است. در نتیجه:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{x}{۵}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵$$

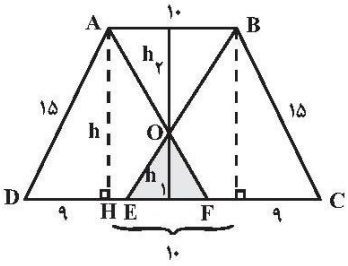
(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

---

10 – گزینهٔ «۳» *(مهدی براتی)*

ابتدا اندازهٔ ارتفاع ذوزنقه را به‌دست می‌آوریم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$h^۲+۹^۲=۱۵^۲\rightarrow h=۱۲\Rightarrow h_۱+h_۲=۱۲$$



از طرف دیگر چون ABED و ABCF متوازی‌الاضلاع هستند داریم:

$$DE = CF = ۱۰ \Rightarrow EF = ۲۸ - ۱۰ - ۱۰ = ۸$$

هم‌چنین واضح است که دو مثلث AOB و EOF متشابهند پس نسبت ارتفاع‌های آن برابر است با نسبت تشابه دو مثلث:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{h_۱}{h_۲} \Rightarrow \frac{h_۱}{h_۲} = \frac{۸}{۱۰} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}} \frac{h_۱}{h_۱ + h_۲} = \frac{۸}{۱۸} = \frac{۴}{۹}$$

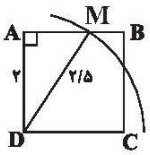
$$\Rightarrow \frac{h_۱}{۱۲} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow h_۱ = \frac{۱۶}{۳} \rightarrow S_{OEF} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times \frac{۱۶}{۳} = \frac{۶۴}{۳}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۰، ۳۱ و ۴۲ تا ۴۶)

---

11 – گزینهٔ «۲» *(سراسری ریاضی – ۹۵)*

مربع ABCD را درنظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز D و شعاع ۲/۵ واحد رسم می‌کنیم. این دایره دو ضلع AB و BC را قطع می‌کند.



با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ DAM، فاصلهٔ نقطهٔ M را از دو رأس A و B محاسبه می‌کنیم:

$$AM^۲ + ۲^۲ = (۲/۵)^۲ \Rightarrow AM^۲ + ۴ = ۶/۲۵ \Rightarrow AM^۲ = ۲/۲۵$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{۲/۲۵} = ۱/۵ \ , \ MB = ۲ - ۱/۵ = ۰/۵$$

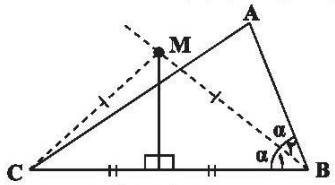
بنابراین فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقاط تقاطع برابر $۰/۵ = \frac{۱}{۲}$ است.

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰ و ۴۲ تا ۴۶)

---

12 – گزینهٔ «۳» *(سراسری خارج از کشور ریاضی – ۱۴۰۰)*

نقطهٔ روی عمودمنصف پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. پس مثلث MBC متساوی‌الساقین است و داریم:



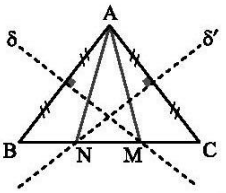
$$M\hat{C}B = M\hat{B}C = \frac{۱}{۲}\hat{B} \xrightarrow{M\hat{C}B > A\hat{C}B} \frac{۱}{۲}\hat{B} > A\hat{C}B \Rightarrow \hat{B} > ۲A\hat{C}B$$

$$\Rightarrow \hat{B} > ۲\hat{C}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

13 – گزینهٔ «۲» *(سراسری تجربی – ۹۲)*

با توجه به شکل زیر داریم:



$$\hat{A} = ۸۰^\circ \ , \ AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{A}}{۲} = ۵۰^\circ$$

هر نقطه واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:

$$\begin{cases} M \in \delta \Rightarrow MA = MB \\ \Rightarrow B\hat{A}M = \hat{B} = ۵۰^\circ \Rightarrow A\widehat{M}B = ۸۰^\circ \\ N \in \delta' \Rightarrow NA = NC \\ \Rightarrow C\hat{A}N = \hat{C} = ۵۰^\circ \Rightarrow A\widehat{N}C = ۸۰^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\hat{A}N = ۱۸۰^\circ - (A\widehat{M}B + A\widehat{N}C) = ۲۰^\circ$$

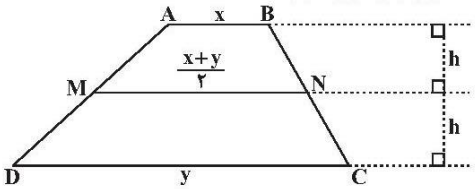
بنابراین، کوچکترین زاویهٔ مثلث AMN زاویهٔ $M\hat{A}N = ۲۰^\circ$ است.

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

---

14 – گزینهٔ «۲» *(سراسری ریاضی – ۹۸)*

می‌دانیم در ذوزنقه طول خط واصل وسط‌های دو ساق، میانگین دو قاعده است. با توجه به شکل و فرض سؤال، داریم:



$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}(x + \frac{x+y}{۲})(h)}{\frac{۱}{۲}(\frac{x+y}{۲} + y)(h)} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{\frac{۳x+y}{۲}}{\frac{x+۳y}{۲}} = \frac{۳}{۵}$$

$$\frac{۳x+y}{x+۳y} \quad \frac{۳}{۵} \quad ۱۵x \quad ۵y \quad ۳x \quad ۹y \quad ۱۲x \quad ۴y \quad \frac{x}{y} \quad \frac{۱}{۳}$$

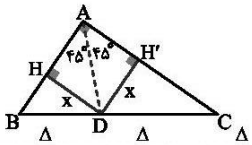
(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۳ تا ۴۱)

---

15 – گزینهٔ «۴» *(سراسری تجربی – ۹۵)*

روش اول: می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع آن زاویه به یک اندازه است، بنابراین:

فرض کنید از نقطهٔ D، عمودهای DH و DH′ را به ترتیب بر AB و AC وارد کرده‌ایم، داریم:



$$S(\overset{\Delta}{ABD}) + S(\overset{\Delta}{ACD}) = S(\overset{\Delta}{ABC})$$

$$\Rightarrow \frac{x.AB}{۲} + \frac{x.AC}{۲} = \frac{AB.AC}{۲} \Rightarrow \frac{۳x}{۲} + \frac{۷x}{۲} = \frac{۳ \times ۷}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۰x = ۲۱ \Rightarrow x = ۲/۱$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH داریم:

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{DH}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{x}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲/۱}{AD}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{۴/۲}{\sqrt{۲}} \Rightarrow AD = \frac{۴/۲}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۴/۲\sqrt{۲}}{۲} = ۲/۱\sqrt{۲}$$

روش دوم:

نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که $\widehat{A} = ۹۰^\circ$، اگر AD نیمساز زاویهٔ قائمه باشد، آنگاه:

$$\frac{\sqrt{۲}}{AD} = \frac{۱}{AB} + \frac{۱}{AC}$$

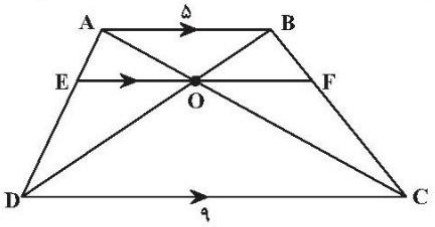
با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$\frac{\sqrt{۲}}{AD} = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۷} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{AD} = \frac{۷+۳}{۷\times۳} \Rightarrow AD = ۲/۱\sqrt{۲}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

---

16 – گزینهٔ «۱» *(سراسری خارج از کشور ریاضی – ۹۹)*



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ADC}: EO \parallel DC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{DC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{۹} = \frac{AE}{AD} \\ \overset{\Delta}{DAB}: EO \parallel AB \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{EO}{AB} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{EO}{۵} = \frac{DE}{AD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{EO}{۹} + \frac{EO}{۵} = \frac{\overbrace{AE+DE}^{AD}}{AD} = ۱ \xrightarrow{\times ۴۵} ۵EO + ۹EO = ۴۵$$

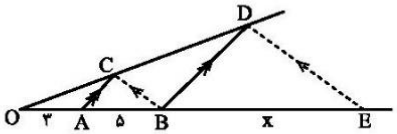
$$\Rightarrow ۱۴EO = ۴۵ \Rightarrow EO = \frac{۴۵}{۱۴}$$

به روش مشابه $\Rightarrow OF = \frac{۴۵}{۱۴} \Rightarrow EF = \frac{۴۵}{۱۴} + \frac{۴۵}{۱۴} = \frac{۴۵}{۷}$

تذکر: در حالت کلی، O وسط EF است و $EF = \frac{۲}{\frac{۱}{AB} + \frac{۱}{DC}}$. (طول EF واسطهٔ توافقی طول قاعده‌ها است.)

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۳ تا ۴۱)

17 – گزینهٔ «۱» *(سراسری خارج از کشور تجربی – ۹۴)*



راه حل اول:

$$\overset{\Delta}{OBD}: AC \parallel BD \Rightarrow \frac{OC}{CD} = \frac{OA}{AB} \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{OED}: BC \parallel ED \Rightarrow \frac{OC}{CD} = \frac{OB}{BE} \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{BE} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۸}{BE}$$

$$\Rightarrow BE = \frac{۴۰}{۳} = \frac{۳۹+۱}{۳} = ۱۳\frac{۱}{۳}$$

راه حل دوم: در حالت کلی، OB واسطهٔ هندسی OA و OE است:

$$OB^۲ = OA.OE$$

پس:

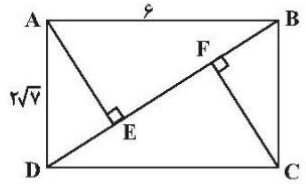
$$(۳+۵)^۲ = ۳(۸+x) \Rightarrow ۸+x = \frac{۶۴}{۳} \Rightarrow x = \frac{۴۰}{۳} = ۱۳\frac{۱}{۳}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۳ تا ۴۱)

---

18 – گزینهٔ «۱» *(سراسری خارج از کشور ریاضی – ۹۶)*

از دو رأس A و C، دو عمود AE و CF را بر قطر BD رسم می‌کنیم.



$$\overset{\Delta}{ABD}: BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ = ۳۶ + ۲۸ = ۶۴ \Rightarrow BD = ۸$$

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

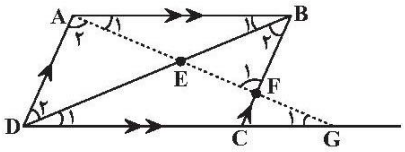
$$\overset{\Delta}{ABD}: AD^۲ = DE.BD \Rightarrow ۲۸ = DE \times ۸ \Rightarrow DE = \frac{۲۸}{۸} = ۳/۵$$

به طور مشابه $BF = ۳/۵$ است و داریم:

$$EF = BD - (DE + BF) = ۸ - ۷ = ۱$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

19 – گزینهٔ «۱» *(سراسری خارج از کشور ریاضی – ۹۹)*



چون $AB \parallel DG$ و $BC \parallel AD$ است، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{G}_1,\hat{B}_1=\hat{D}_1 \Rightarrow \overset{\Delta}{EAB}\sim\overset{\Delta}{EGD}\Rightarrow \dfrac{EA}{EG}=\dfrac{EB}{ED}\\ \hat{B}_2=\hat{D}_2,\hat{F}_1=\hat{A}_2 \Rightarrow \overset{\Delta}{EBF}\sim\overset{\Delta}{EAD}\Rightarrow \dfrac{EF}{EA}=\dfrac{EB}{ED}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{EG}=\frac{EF}{EA}\Rightarrow EF.EG=EA^2$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

---

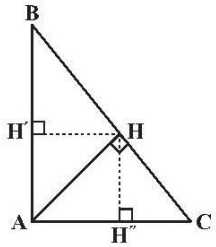
20 – گزینهٔ «۲» *(سراسری تجربی – ۹۱)*

گام اول:

الف) مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه است.

ب) با فرض این‌که $HC < HB$ باشد، داریم: $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = 6/76 S_{\overset{\Delta}{AHC}}$

ج) $\dfrac{HH''}{HH'} = ?$



گام دوم:

سه مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{AHC}$، $\overset{\Delta}{AHB}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ با هم متشابه‌اند. می‌دانیم در مثلث‌های متشابه نسبت تشابه برابر جذر نسبت مساحت‌ها است.

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHC}}}=6/76 \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABH}}+S_{\overset{\Delta}{AHC}}}{S_{\overset{\Delta}{AHC}}}=6/76$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABH}}}{S_{\overset{\Delta}{AHC}}}+1=6/76 \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{ABH}}}{S_{\overset{\Delta}{AHC}}}=5/76$$

هم‌چنین می‌دانیم در مثلث‌های متشابه، نسبت تشابه با نسبت ارتفاع‌ها برابر است.

چون دو مثلث $\overset{\Delta}{ABH}$ و $\overset{\Delta}{AHC}$ با هم متشابه‌اند، داریم:

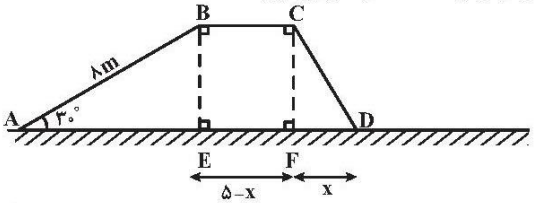
$$\frac{HH'}{HH''}=\sqrt{5/76}=2/4 \Rightarrow \frac{HH'}{HH''}=\frac{24}{10}=\frac{12}{5} \Rightarrow \frac{HH''}{HH'}=\frac{5}{12}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

---

21 – گزینهٔ «۳» *(حمید علیزاده)*

با درنظر گرفتن $FD = x$ و شکل زیر داریم:



$$\overset{\Delta}{ABE}: \sin 30 = \frac{BE}{8} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{BE}{8} \Rightarrow BE = CF = 4m$$

$$\overset{\Delta}{CDF}: CD^2 = x^2+4^2 \Rightarrow CD=\sqrt{16+x^2}$$

انرژی مصرفی در مسیر پیاده‌روی $ABCD$:

$$\Rightarrow 8(15)+12(5-x)+6\sqrt{16+x^2}=174$$

$$\Rightarrow 120+60-12x+6\sqrt{16+x^2}=174$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{16+x^2}=12x-6$$

$$\xrightarrow{\div 6} \sqrt{16+x^2}=2x-1 \xrightarrow[\text{دو}]{\text{توان}} 16+x^2=4x^2-4x+1$$

$$\Rightarrow 3x^2-4x-15=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\pm 14}{6} \Rightarrow \begin{cases} x=3 & \text{ق ق} \\ x=\frac{-5}{3} & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

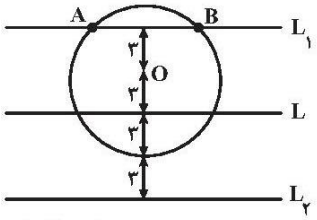
طول مسیر CD برابر ۵ است. $CD=\sqrt{16+x^2}=\sqrt{16+9}=5$

(هندسهٔ تحلیلی و جبر) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۱۹ تا ۲۳)

---

22 – گزینهٔ «۳» *(نیما کریوریان)*

مطابق شکل زیر نقاطی که از خط L به فاصلهٔ ۶ می‌باشند برابر دو خط موازی در طرفین خط L می‌باشند و همچنین نقاطی که از O به فاصلهٔ ۶ می‌باشند، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۶ هستند، در نتیجه تلاقی این مکان هندسی، که نقاط A و B می‌باشند جواب مسئله است.

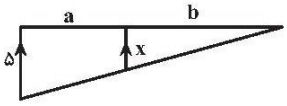


(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

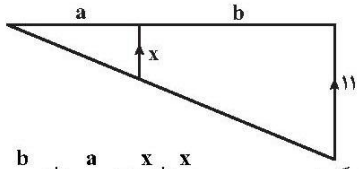
---

23 – گزینهٔ «۴» *(لیلا مداری)*

کافیست دو بار از قضیهٔ تالس استفاده کنیم:



$$\Rightarrow \frac{b}{b+a}=\frac{x}{5} \qquad (1)$$



$$\Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{x}{11} \qquad (2)$$

رابطهٔ (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم:

$$\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}=\frac{x}{5}+\frac{x}{11}$$

www.mapedu.ir

$$\Rightarrow x(\frac{1}{5}+\frac{1}{11})=1 \Rightarrow x=\frac{55}{16}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ تا ۳۱)

---

24 – گزینهٔ «۲» (حمید علیزاده)

با توجه به تشابه دو مثلث ABH و AHC داریم:

$$\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{AHC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABH}}}=5/76$$

$$\Rightarrow (\text{نسبت تشابه})^2 = K^2 \Rightarrow K=2/4$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB}=2/4 \Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{12}{5} \Rightarrow AC=\frac{12}{5}AB$$

در مثلث ABC داریم:

$$BC^2=AB^2+AC^2 \Rightarrow (13^2)=AB^2+\frac{144}{25}AB^2$$

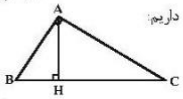
$$169=\frac{169AB^2}{25} \Rightarrow AB=5 \Rightarrow AC=12$$

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ABH} \Rightarrow \frac{BC}{AB}=\frac{h}{h_1} \Rightarrow \frac{h}{h_1}=\frac{13}{5}=2/6$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

25 – گزینهٔ «۳» (ابراهیم نظری)

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:



$$AH^2=BH\times CH \Rightarrow 144=BH\times 16$$

$$\Rightarrow BH=9 \Rightarrow BC=9+16=25$$

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AH\times BH}{\frac{1}{2}AH\times BC}=\frac{BH}{BC}=\frac{9}{25}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

26– گزینهٔ «۴» (امیرحسین ابومحبوب)

دو زاویهٔ OBH و CAH هر دو متمم زاویهٔ C هستند، پس برابر یکدیگرند

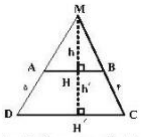
$$\left.\begin{array}{l} O\hat{B}H=C\hat{A}H \\ O\hat{H}B=A\hat{H}C=90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} \overset{\Delta}{OBH} \sim \overset{\Delta}{CAH}$$

$$\Rightarrow \frac{OH}{CH}=\frac{BH}{AH} \Rightarrow \frac{6}{8}=\frac{BH}{9} \Rightarrow BH=\frac{54}{8}=6/75$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

---

27 – گزینهٔ «۴» (اختیر خاصه‌خان)



دو مثلث MAB و MCD متشابه‌اند و نسبت ارتفاع‌ها در این دو مثلث برابر نسبت تشابه است، پس داریم:

$$\frac{MH}{MH'}=\frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{h}{h+h'}=\frac{6}{9} \xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}} \frac{h}{h'}=\frac{6}{3}=2$$

$$\frac{S_{MAB}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}h\times AB}{\frac{1}{2}h'(AB+CD)}=\frac{h}{h'}\times\frac{AB}{AB+CD}=2\times\frac{6}{6+9}=\frac{12}{15}=0/8$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

---

28 – گزینهٔ «۲» (رضا عباسی‌اصل)

$$C\hat{E}B=C\hat{D}B \Rightarrow A\hat{E}B=A\hat{D}C$$

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{E}B=A\hat{D}C \\ \hat{A}=\hat{A} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تساوی دو زاویه}} \overset{\Delta}{AEB} \sim \overset{\Delta}{ADC}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{3}{x}=\frac{x+3}{18}$$

$$\Rightarrow x(x+3)=54 \Rightarrow x^2+3x-54=0$$

$$\Rightarrow (x+9)(x-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-9 \text{ غ‌ق‌ق} \\ x=6 \end{cases}$$

29– گزینهٔ «۲» (مجتبی نادری)

طبق قضیهٔ تالس داریم:

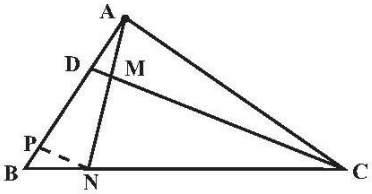
جز به جز تالس: $\frac{9}{y}=\frac{y^2}{3}\Rightarrow y^3=27\Rightarrow y=3$

جز به کل تالس: $\frac{9}{y+9}=\frac{x+2}{y+x+2}\Rightarrow\frac{9}{3+9}=\frac{x+2}{3+x+2}$

$$\Rightarrow\frac{9}{12}=\frac{x+2}{x+5}\Rightarrow 9(x+5)=12(x+2)$$
$$\Rightarrow 9x+45=12x+24$$
$$\Rightarrow 9x-12x=24-45\Rightarrow -3x=-21\Rightarrow x=7$$
$$\Rightarrow 2x-3y=(2\times7)-(3\times3)=14-9=5$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ تا ۳۱)

30– گزینهٔ «۴» (توحید اسدی)



پاره‌خط NP را موازی با DM رسم می‌کنیم:

$$\overset{\Delta}{CBD}: NP \parallel CD \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{BP}{DP}=\frac{BN}{CN}=\frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}} \frac{BP+DP}{DP}=\frac{1+3}{3}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{DP}{BD}=\frac{3}{4}$$

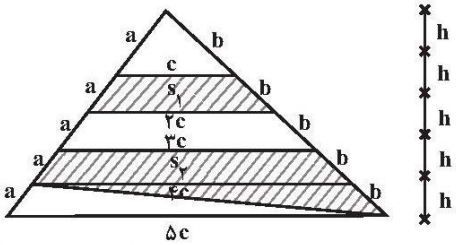
$$\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}\xrightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}}\frac{AD}{AB-AD}=\frac{1}{3-1}\Rightarrow\frac{AD}{BD}=\frac{1}{2}$$

$$\overset{\Delta}{ANP}: DM \parallel NP \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AM}{MN}=\frac{AD}{DP}=\frac{\frac{AD}{BD}}{\frac{DP}{BD}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{MN}{AM}=\frac{3}{2}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ تا ۳۱)

31– گزینهٔ «۲» (محمدحسن سلامی‌حسینی)

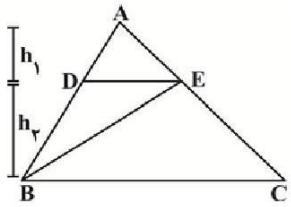


$$\frac{s_2}{s_1}=\frac{\frac{1}{2}(3c+4c)h+\frac{1}{2}(4c)h}{\frac{1}{2}(c+2c)\times h}=\frac{11}{3}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ تا ۳۱)

32– گزینهٔ «۲» (مهرداد ملوندی)

چون $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{2}$ و $DE \parallel BC$ به راحتی از تشابه می‌توان نتیجه گرفت:



$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{1}{2}\Rightarrow h_1=\frac{1}{2}h_2$$

داریم:

$$\frac{S_{BDE}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}DE\times h_2}{\frac{1}{2}BC.(h_1+h_2)}=(\frac{DE}{BC}).(\frac{h_2}{\frac{1}{2}h_2+h_2})$$
$$=\frac{AD}{AB}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ تا ۳۱)

33– گزینهٔ «۱» (محمدحسن سلامی‌حسینی)

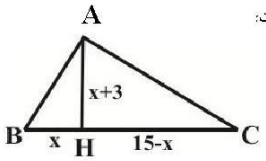
مثلث‌های $A\hat{D}E$ و $A\hat{B}C$ دارای سه زاویه برابرند پس متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}\Rightarrow\frac{x}{35}=\frac{9}{x+6}\Rightarrow x(x+6)=35\times9=15\times21$$
$$\Rightarrow x=15$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

34– گزینهٔ «۳» (مهرداد ملوندی)

اطلاعات فرض سؤال در شکل زیر قرار گرفته است:



بنابر روابط طولی در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$AH^2=BH.CH\Rightarrow(x+3)^2=x(15-x)\Rightarrow x^2+6x+9=15x-x^2$$
$$\Rightarrow 2x^2-9x+9=0\Rightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{4}=3,\frac{3}{2}$$

AC ضلع متوسط مثلث ABC است و داریم:

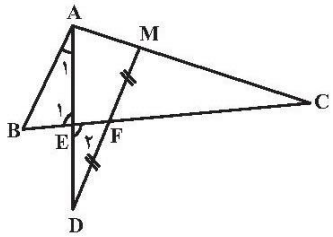
$$AC^2=CH.CB=(15-x)\times15$$
$$x=3\rightarrow AC=\sqrt{12\times15}=6\sqrt{5}$$
$$x=\frac{3}{2}\rightarrow AC=\sqrt{\frac{27}{2}\times15}=9\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{9\sqrt{10}}{2}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

www.mapedu.ir

35– گزینهٔ «۳» (رضا علی‌نواز)

چون $AB \parallel MD$ است، پس $\hat{A}_1 = \hat{D}$ می‌باشد. از طرفی $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$ می‌باشد.



بنابراین دو مثلث ABE و DEF با هم متشابه هستند که می‌توان نوشت:

$$\boxed{\frac{FD}{AB}=\frac{EF}{BE}=\frac{۲}{۳}} \quad (۱)$$

از رابطه تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$MF \parallel AB \Rightarrow \frac{CF}{CB}=\frac{MF}{AB}$$

چون $MF = FD$ می‌باشد، پس:

$$\boxed{\frac{CF}{CB}=\frac{FD}{AB}} \quad (۲)$$

با ترکیب رابطه ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{CF}{CB}=\frac{۲}{۳}$$

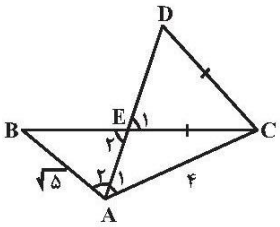
$$\Rightarrow \frac{CF}{CF+FE+EB}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{CF}{CF+۵}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳CF = ۲CF + ۱۰$$

$$\Rightarrow CF = ۱۰$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ تا ۳۶)

36– گزینهٔ «۲» (رضا علی‌نواز)

چون AE نیمساز A است، پس $\boxed{\hat{A}_1 = \hat{A}_2}$ و همچنین $\hat{E}_2 = \hat{E}_1$ (متقابل به رأس) می‌باشند. چون $CE = CD$ است، پس $\hat{E}_1 = \hat{D}$ در نتیجه $\boxed{\hat{E}_2 = \hat{D}}$ خواهد بود.



بنا به حالت دو زاویه برابر دو مثلث ABE و ADC با هم متشابهند $\begin{cases}\hat{E}_2 = \hat{D} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2\end{cases}$

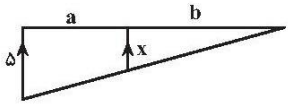
$$\Rightarrow \text{نسبت تشابه} = K = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{۵}}{۴} \Rightarrow \frac{S_{ABE}}{S_{ADC}} = K^۲ = \frac{۵}{۱۶}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰}{S_{ADC}} = \frac{۵}{۱۶} \Rightarrow S_{ADC} = \frac{۱۶۰}{۵} = ۳۲$$

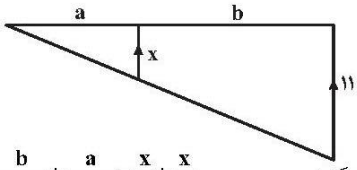
(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

37– گزینهٔ «۴» (لیلا مداری)

کافیست دو بار از قضیهٔ تالس استفاده کنیم:



$$\Rightarrow \frac{b}{b+a}=\frac{x}{۵} \quad (۱)$$



$$\Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{x}{۱۱} \quad (۲)$$

رابطهٔ (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم:

$$\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}=\frac{x}{۵}+\frac{x}{۱۱}$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۱}\right)=۱ \Rightarrow x=\frac{۵۵}{۱۶}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ تا ۳۱)

38– گزینهٔ «۲» (حمید علیزاده)

با توجه به تشابه دو مثلث ABH و AHC داریم:

$$\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{AHC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABH}}} = ۵/۷۶$$

$$\Rightarrow (\text{نسبت تشابه})^۲ = K^۲ \Rightarrow K = ۲/۴$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = ۲/۴ \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{۱۲}{۵} \Rightarrow AC = \frac{۱۲}{۵}AB$$

در مثلث ABC داریم:

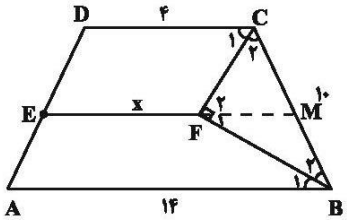
$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow (۱۳^۲) = AB^۲ + \frac{۱۴۴}{۲۵}AB^۲$$

$$۱۶۹ = \frac{۱۶۹AB^۲}{۲۵} \Rightarrow AB = ۵ \Rightarrow AC = ۱۲$$

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ABH} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{h}{h_1} \Rightarrow \frac{h}{h_1} = \frac{۱۳}{۵} = ۲/۶$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

39– گزینهٔ «۱» (فرشاد حسن‌زاده)



$$\begin{cases}\hat{B}_1 = \hat{B}_2 & \text{نیمساز} \\ \hat{B}_1 = \hat{F}_1 & \text{خط موازی}\end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{MBF} : \hat{F}_1 = \hat{B}_2 \Rightarrow MF = MB$$

$$\begin{cases}\hat{C}_1 = \hat{C}_2 & \text{نیمساز} \\ \hat{C}_1 = \hat{F}_2 & \text{خط موازی}\end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{MCF} : \hat{F}_2 = \hat{C}_2 \Rightarrow MC = MF$$

$$\Rightarrow MC = MF = MB = ۵ \xrightarrow{EM \parallel AB, CD} AE = ED$$

$$AE = ED, MC = MB \Rightarrow ME = \frac{DC + AB}{۲} = \frac{۱۴+۴}{۲} = ۹$$

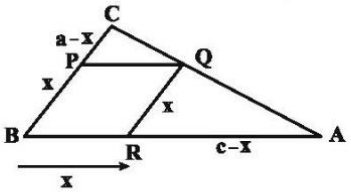
$$\Rightarrow EF = ۹ - ۵ = ۴$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۱)

www.mapedu.ir

40 – گزینهٔ «۳» *(محمد حمیدی)*

اگر ضلع لوزی را برابر x و اندازهٔ اضلاع AB و BC را به ترتیب برابر c و a در نظر بگیریم؛ خواهیم داشت:



فرض: $\frac{c}{a}=۲$

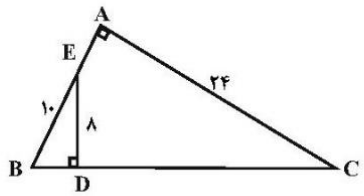
$$\left.\begin{array}{l} RQ \parallel BC \Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{c-x}{c} \Rightarrow \frac{x}{c-x}=\frac{a}{c}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{x}{c}=\frac{۱}{۳} \\ PQ \parallel BA \Rightarrow \frac{x}{c}=\frac{a-x}{a} \Rightarrow \frac{x}{a-x}=\frac{c}{a}=۲ \Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{۲}{۳} \end{array}\right\}$$

$$\frac{\text{مساحت لوزی}}{\text{مساحت مثلث}}=\frac{x^۲\sin\hat{B}}{\frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B}}=۲(\frac{x}{a})(\frac{x}{c})=۲(\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳})=\frac{۴}{۹}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ تا ۳۱)

41 – گزینهٔ «۳» *(علی ساوجی)*

از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث EBD نتیجه می‌شود:



$$BD^۲=EB^۲-ED^۲ \Rightarrow BD^۲=۱۰۰-۶۴$$

$$\Rightarrow BD^۲=۳۶ \Rightarrow BD=۶$$

دو مثلث ABC و EBD متشابه‌اند: (مشترک $\hat{B}$ ، $\hat{A}=\hat{D}=۹۰^\circ$)

$$\frac{EB}{BC}=\frac{ED}{AC} \Rightarrow \frac{۱۰}{BC}=\frac{۸}{۲۴} \Rightarrow BC=۳۰$$

$$\Rightarrow DC=BC-BD=۳۰-۶=۲۴$$

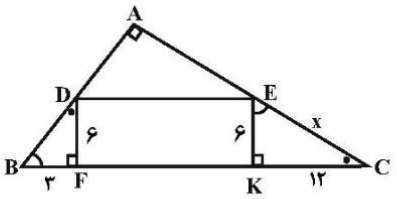
(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

---

42 – گزینهٔ «۴» *(فرشاد حسن‌زاده)*

دو مثلث BDF و KEC متشابه‌اند:

$$\frac{KE}{BF}=\frac{EC}{BD}=\frac{KC}{DF} \Rightarrow$$



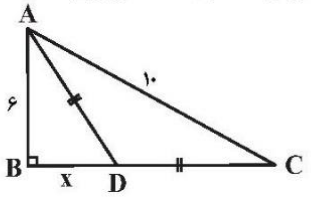
$$\frac{۶}{۳}=\frac{x}{BD}=\frac{KC}{۶} \Rightarrow KC=۱۲$$

$$x^۲=۱۲^۲+۶^۲=۱۴۴+۳۶=۱۸۰ \Rightarrow x=۶\sqrt{۵}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۴۲ تا ۴۶)

43 – گزینهٔ «۳» *(علی ساوجی)*

چون D روی عمود منصف AC قرار دارد، از A و C به یک فاصله است. با استفاده از فیثاغورس، BC را به‌دست می‌آوریم:



$$AB^۲+BC^۲=AC^۲ \Rightarrow ۶^۲+BC^۲=۱۰۰$$

$$\Rightarrow BC^۲=۶۴ \Rightarrow BC=۸$$

در نتیجه: $AD=CD=۸-x$. در مثلث ABD قضیهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$(۸-x)^۲=۶^۲+x^۲ \Rightarrow ۶۴-۱۶x+x^۲=۳۶+x^۲$$

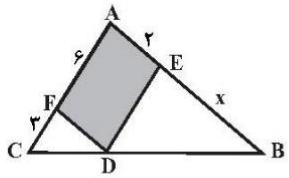
$$\Rightarrow ۱۶x=۲۸ \Rightarrow x=\frac{۷}{۴}$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰)

---

44 – گزینهٔ «۲» *(علی ساوجی)*

دو بار از قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم:



$$۱)\ DE \parallel AC \Rightarrow \frac{AE}{EB}=\frac{CD}{DB}$$

$$۲)\ FD \parallel AB \Rightarrow \frac{CF}{FA}=\frac{CD}{DB}$$

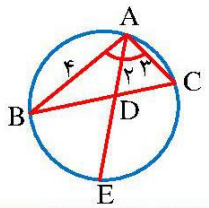
از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FA} \Rightarrow \frac{۲}{x}=\frac{۳}{۶} \Rightarrow x=۴$$

(هندسه) (ریاضی ۲، صفحه‌های ۳۱ تا ۴۱)

اختراعات و کشفیات

1 - رئوس مثلث ABC روی دایره واقع شده‌اند. امتداد نیمساز AD محیط دایره را در E قطع می‌کند. طول پاره‌خط DE کدام است؟



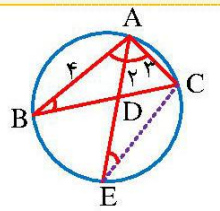
۱) ۳/۷۵
۲) ۳
۳) ۳/۵
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

۱) در دایره، ۲ زاویه روبه‌رو به یک کمان با هم برابرند.
۲) نیمساز هر زاویه آن را به ۲ زاویه برابر تقسیم می‌کند.

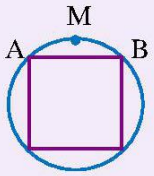
اگر خط EC را رسم کنیم با توجه به آن که AD نیمساز است. داریم:



$$\begin{matrix}\hat{B}=\hat{E}\\ \hat{A}_1=\hat{A}_2\end{matrix} \Rightarrow A\overset{\triangle}{E}C \sim A\overset{\triangle}{B}D$$

$$\frac{AC}{AD}=\frac{EC}{BD}=\frac{AE}{AB}\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{EC}{BD}=\frac{\overset{2}{\cancel{AD}}+DE}{4}\Rightarrow DE=4$$

سوالات منتخب:

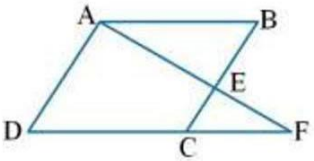


در شکل مقابل اندازه ضلع مربع ۲ واحد است. فاصله وسط کمان AB از نزدیک‌ترین رأس مربع چقدر است؟

۱) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$
۲) $\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ ✓
۳) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$
۴) $\sqrt{2}$

گروه آموزشی ماز

2 - در متوازی‌الاضلاع ABCD اگر $3CE=AD$ باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD چند برابر مساحت مثلث ECF است؟

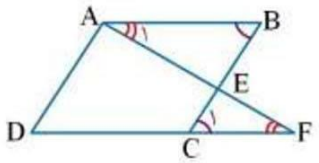


۱) ۹
۲) ۱۲
۳) ۸
۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ دشوار)

نکته) اگر نسبت تشابه دو مثلث k باشد، نسبت مساحت‌های آن‌ها k^2 است.
نکته) در دو مثلث با ارتفاع برابر، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌هاست.
نکته) قطر متوازی‌الاضلاع مساحت آن را نصف می‌کند.

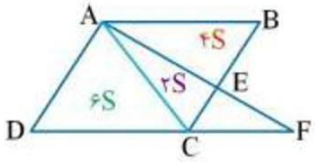
با توجه به خطوط موازی و مورب $\hat{B}=\hat{C}_1$ و $\hat{F}=\hat{A}_1$، پس دو مثلث ECF و ABE متشابهند.



چون $BC=AD=3CE$ پس $BE=2EC$ یعنی دو مثلث با نسبت تشابه ۲، متشابه هستند.

حال با رسم خط AC ، دو مثلث هم ارتفاع به دست می‌آید.

با این مقدمه در شکل مقابل، داریم:

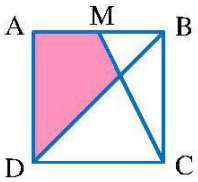


دقت کنید $BE=2EC$، لذا $S_{\overset{\triangle}{ABE}}=2S_{\overset{\triangle}{ACE}}$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع $12S$ و مساحت مثلث ECF برابر S است.

www.biomaze.ir

3- اگر شرط $AM=3MB$ در مربع ABCD برقرار باشد، قسمت رنگ شده چند درصد مساحت مربع است؟



۱) ۴۴

۲) ۴۱/۵

۳) ۴۷/۵

۴) ۴۹

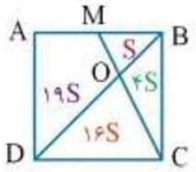
پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

۱) اگر نسبت تشابه دو مثلث k باشد، نسبت مساحت‌ها k^2 است.

۲) قطر مربع مساحت مربع را نصف می‌کند.

۳) اگر دو مثلث با ارتفاع یکسان باشند و نسبت قاعده‌ها $\frac{m}{n}$ باشد، نسبت مساحت‌ها نیز $\frac{m}{n}$ خواهد شد.



$$\left.\begin{array}{l} M\hat{B}O=O\hat{D}C=45^\circ \\ M\hat{O}B=D\hat{O}C \end{array}\right\} \Rightarrow O\overset{\triangle}{M}B \sim O\overset{\triangle}{D}C \text{ و } MB=\frac{1}{4}DC$$

پس نسبت تشابه دو مثلث $\frac{1}{4}$ است و نسبت مساحت‌ها $\frac{1}{16}$ خواهد شد.

پس در شکل داریم: $S_{\overset{\triangle}{OMB}}=S$، آن‌گاه در شکل جایگزین می‌کنیم.

از طرفی در مثلث OBC و OMB داریم $OC=4OM$، پس: $S_{\overset{\triangle}{OBC}}=4S_{\overset{\triangle}{OMB}}$

لذا چون قطر مربع مساحت مربع را نصف می‌کند، پس :

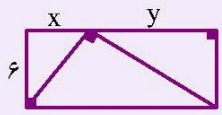
$$S_{OMAD}+S=4S+16S$$

پس:

$$\frac{S_{OMAD}}{S_{\text{مربع}}}=\frac{19S}{40S}=\frac{19}{40}=\%47/5$$

سوالات منتخب:

در شکل روبه‌رو مقدار xy کدام است ؟



۱) ۱۸

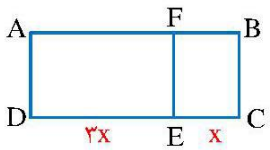
۲) ۳۶ ✓

۳) ۷۲

۴) ۲۴

گروه آموزشی ماز

4- دو مستطیل ABCD و FBCE متشابهند. اگر مساحت مستطیل ABCD، برابر ۷۲ باشد. محیط مستطیل کوچکتر کدام است؟



۱) ۱۸

۲) ۲۴

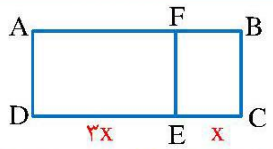
۳) ۲۱

۴) ۳۶

www.mapedu.ir

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ ساده)

دو مستطیل متشابهند پس داریم:

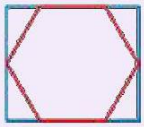


$$\frac{BC}{EC}=\frac{DC}{BC}\Rightarrow BC^{۲}=۴x.x\Rightarrow BC=۲x$$

مستطیل ABCD $S=BC\times DC\Rightarrow S=۲x\times ۴x=۸x^{۲}$

$۸x^{۲}=۷۲\Rightarrow x=۳\Rightarrow$ محیط FBCE $=۲(x+۲x)=۶x=۱۸$

سوالات منتخب:



در شکل روبه‌رو، اگر مساحت مربع ۲ واحد باشد، مساحت ۸ ضلعی منتظم کدام است؟

۱) $۴(\sqrt{۲}+۱)$

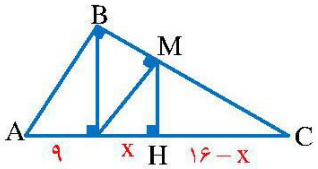
۲) $۴(\sqrt{۲}-۱)$ ✓

۳) $۴(۲-\sqrt{۲})$

۴) $۲(\sqrt{۲}+۱)$

www.biomaze.ir

5 - ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه MH کدام است؟



۱) ۶/۷۶

۲) ۶/۹۲

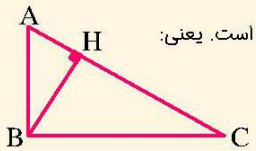
۳) ۷/۲۴

۴) ۷/۶۸

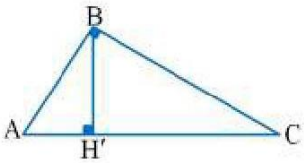
پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

در مثلث قائم‌الزاویه ABC که $\hat{B}=۹۰^{\circ}$، ارتفاع وارد بر وتر، از واسطه هندسی بین دو قطعه ایجاد شده روی وتر پدید آمده است. یعنی:



$$BH^{۲}=AH.HC$$

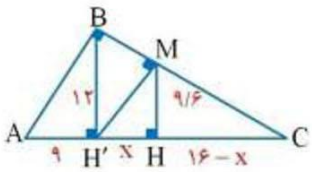


$$BH'^{۲}=AH'.H'C\Rightarrow BH'^{۲}=۹\times ۱۶\Rightarrow BH'=۱۲$$

$$AB=\sqrt{۹^{۲}+۱۲^{۲}}=۱۵$$

$$MH'\parallel AB\Rightarrow\frac{MH'}{AB}=\frac{CH'}{AC}\Rightarrow\frac{MH'}{۱۵}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow MH'=\frac{۴۸}{۵}=۹/۶$$

در مثلث MH′C داریم:

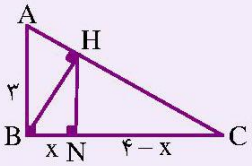


$$MH'^{۲}=x(۱۶)\Rightarrow(۹/۶)^{۲}=x\times ۱۶\Rightarrow x=\frac{۹/۶^{۲}}{۱۶}\Rightarrow x=۵/۷۶$$

$$MH^{۲}=x\times(۱۶-x)\Rightarrow MH^{۲}=۵/۷۶\times ۱۰/۲۴\Rightarrow MH=۲/۴\times ۳/۲=۷/۶۸$$

سوالات منتخب:

در شکل روبه‌رو، x کدام است؟



۱) ۱/۴۴ ✓

۲) ۱/۵۶

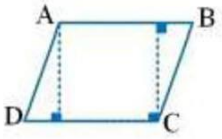
۳) ۱/۶۴

۴) ۱/۹۶

گروه آموزشی ماز

www.mapedu.ir

6 - در شکل روبه‌رو، دو مثلث قائم‌الزاویه هم‌نهشت‌اند و چهارضلعی میانی، مربع است. اگر مساحت مربع ۶۴ و مساحت یکی از مثلث‌های قائم‌الزاویه ۲۴ باشد، نسبت دو ضلع متوازی‌الاضلاع کدام است؟



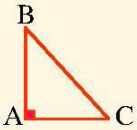
۱) $\frac{۵}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$

۳) $\frac{۷}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ آسان)

هر تست ماز یک کلاس درس!

مثلث قائم‌الزاویه باشد $\Rightarrow$



$S = \frac{۱}{۲} AB.AC$

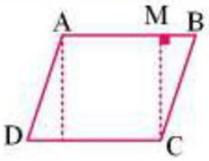
مربع $S = ۶۴ \Rightarrow$ ضلع مربع $= ۸$

مثلث $S = ۲۴ \Rightarrow \underbrace{MB}_{x} . \underbrace{MC}_{۸} = ۴۸ \Rightarrow MB = ۶$

ضلع بزرگتر متوازی‌الاضلاع $= ۸ + ۶ = ۱۴$

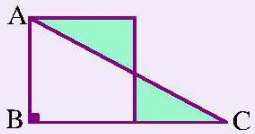
ضلع کوچکتر متوازی‌الاضلاع $= \sqrt{۸^۲ + ۶^۲} = ۱۰$

$\Rightarrow$ نسبت دو ضلع $= \frac{۱۰}{۱۴} = \frac{۵}{۷}$



سوالات منتخب:

اگر دو مثلث رنگی هم‌نهشت باشند، مساحت ذوزنقه چند برابر مساحت مربع است؟

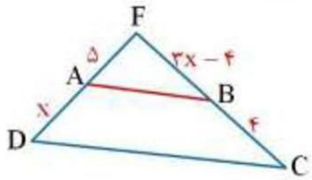


۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ✔ ۴) $\frac{۴}{۵}$

www.biomaze.ir

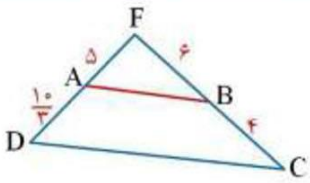
7 - در شکل مقابل، مساحت ذوزنقه **ABCD** چند برابر مساحت مثلث **AFB** است؟



۱) $\frac{۱۶}{۹}$ ۲) $\frac{۲۰}{۹}$

۳) $\frac{۲۵}{۹}$ ۴) $\frac{۱۹}{۹}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ متوسط)



$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow \frac{۵}{x} = \frac{۳x - ۴}{۴} \Rightarrow ۲۰ = ۳x^۲ - ۴x \Rightarrow ۳x^۲ - ۴x - ۲۰ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۱۰}{۳} \\ x = -۲ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

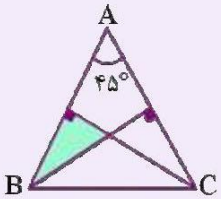
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AFB}}}{S_{\overset{\triangle}{FDC}}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۶ \times \sin \hat{F}}{\frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times \frac{۲۵}{۳} \times \sin \hat{F}} = \frac{۳۰}{\frac{۲۵۰}{۳}} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{\text{ذوزنقه}}}{S_{\overset{\triangle}{FDC}}} = \frac{۱۶}{۲۵}$$

پس مساحت ذوزنقه $\frac{۱۶}{۹}$ برابر مساحت مثلث AFB است.

www.mapedu.ir

سوالات منتخب:

مثلث ABC متساوی‌الساقین است و طول هر ساق آن ۸ است. مساحت مثلث رنگ شده کدام است؟

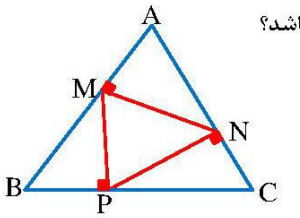


۱) $\frac{۶}{۲+\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۸}{۲+\sqrt{۳}}$

۳) $\frac{۱۶}{۳+۲\sqrt{۲}}$ ✓ ۴) $\frac{۱۲}{۳+۲\sqrt{۲}}$

گروه آموزشی ماز

8 - مثلث ABC و مثلث MNP هر دو متساوی‌الاضلاع هستند. نسبت مساحت‌های این دو مثلث کدام می‌تواند باشد؟



۱) ۳

۲) $۳\sqrt{۲}$

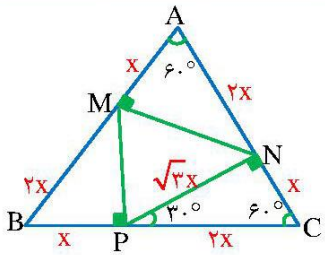
۳) $۲\sqrt{۳}$

۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

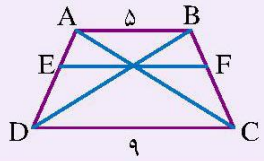
نکته) دقت کنید هر زاویه مثلث متساوی‌الاضلاع ۶۰° است. پس مثلث‌های کناری به زوایای ۹۰°، ۶۰° و ۳۰° هستند. پس وتر دو برابر یکی از اضلاع است.

چون نسبت اضلاع $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است، پس نسبت مساحت‌ها $\frac{۱}{۳}$ یا ۳ می‌شود.



سوالات منتخب:

اگر $AB \parallel EF \parallel DC$ باشد، اندازه پاره‌خط FE کدام است؟



۱) $\frac{۴۵}{۷}$ ✓ ۲) $\frac{۴۵}{۶}$

۳) ۷ ۴) $۳\sqrt{۵}$

9 - عکس کدام گزاره شرطی، مثال نقض دارد؟

۱) اگر $x = ۳$، آن‌گاه: $x^۲ - ۶x + ۹ = ۰$.

۲) اگر $x = ۲$، آن‌گاه: $x^۳ - ۲x^۲ = ۰$.

۳) اگر $x > ۴$، آن‌گاه: $x^۳ > ۶۴$.

۴) اگر n فرد باشد، آن‌گاه: $n^۲$ فرد است.

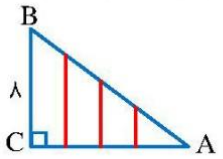
پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

نکته) اگر $p \Rightarrow q$ یک گزاره شرطی باشد، عکس آن $q \Rightarrow p$ است.

گزاره $q \Rightarrow p$ زمانی نادرست است که گزاره q صحیح باشد و p صحیح نباشد.

عکس $p \Rightarrow q$ برابر $q \Rightarrow p$ است. حالتی مثال نقض دارد که q برقرار باشد و p برقرار نباشد. مثلاً در گزینه ۲، اگر $x^۳ - ۲x^۲ = ۰$ ممکن است $x = ۰$ باشد (ولی $x = ۲$ برقرار نباشد). عکس تمام گزینه‌های دیگر همواره صحیح است و مثال نقضی ندارد.

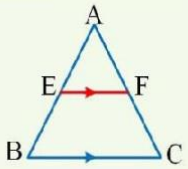
10 - ضلع AC را به ۴ قسمت برابر تقسیم کرده و از نقاط به موازات BC رسم کنیم. جمع طول پاره‌خط‌های رسم شده به موازات BC چه عددی است؟



۱) ۱۰
۲) ۱۴
۳) ۱۶
۴) ۱۲

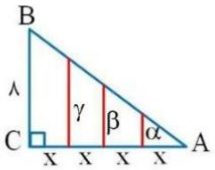
پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

نکته)



$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$$ (تالس جز به کل)

تمام خطوط رسم شده موازی BC هستند. طبق تالس جز به کل داریم:



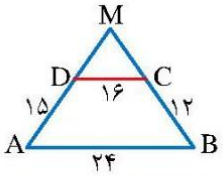
$$\frac{x}{۴x} = \frac{\alpha}{۸} \Rightarrow \alpha = ۲$$

$$\frac{۲x}{۴x} = \frac{\beta}{۸} \Rightarrow \beta = ۴$$

$$\frac{۳x}{۴x} = \frac{\gamma}{۸} \Rightarrow \gamma = ۶$$

$$\alpha + \beta + \gamma = ۱۲$$

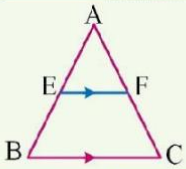
11 - دو ساق ذوزنقه را امتداد داده‌ایم تا در نقطه M یکدیگر را قطع کنند. محیط مثلث MAB کدام است؟



۱) ۹۳
۲) ۱۰۵
۳) ۸۱
۴) ۷۰

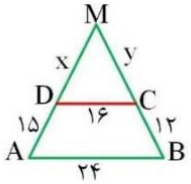
پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

نکته) در مثلث ABC اگر EF موازی BC باشد، داریم:



$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$ (تالس جز به کل)

فرض می‌کنیم $MD = x$ و $MC = y$، مطابق تالس داریم:



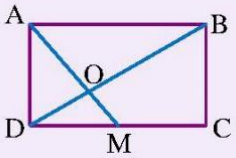
$$\frac{x}{۱۵+x} = \frac{۱۶}{۲۴} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳x = ۳۰ + ۲x \Rightarrow x = ۳۰$$

$$\frac{y}{y+۱۲} = \frac{۱۶}{۲۴} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳y = ۲y + ۲۴ \Rightarrow y = ۲۴$$

محیط مثلث AMB $= ۳۰ + ۱۵ + ۲۴ + ۱۲ + ۲۴ = ۱۰۵$

سوالات منتخب:

در مستطیل مقابل $AB = ۴$ و $BC = ۳$ است، اگر M وسط DC باشد، اندازه OD کدام است؟



۱) ۲/۵
۲) $\frac{۵}{۳}$ ✓
۳) ۱/۷۵
۴) ۱

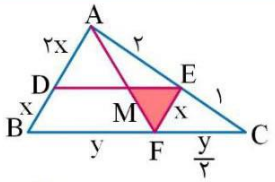
12 - اگر چهارضلعی **DEFB** متوازی‌الاضلاع باشد، مساحت ناحیه رنگ شده، چه کسری از مساحت مثلث **ABC** است؟

۱) $\frac{۱}{۲۷}$ ۲) $\frac{۲}{۲۵}$

۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۲}{۲۷}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ دشوار)

چهارضلعی DEFB متوازی‌الاضلاع است. پس $DE = BF$ و $EF = DB$، با توجه به قضیه تالس داریم:



$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{y}{BC}\Rightarrow BC=\frac{۳}{۲}y\Rightarrow FC=\frac{y}{۲}$$

از طرفی در مثلث AFC داریم:

$$\frac{ME}{FC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ME=\frac{۲}{۳}\times\frac{y}{۲}=\frac{y}{۳}$$

در متوازی‌الاضلاع $\hat{B}=\hat{E}$، پس:

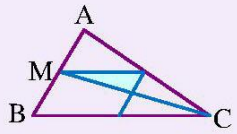
$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AB.BC\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}.۳x.\frac{۳y}{۲}\sin\hat{B}$$

$$S_{\overset{\triangle}{EMF}}=\frac{۱}{۲}EM.FE.\sin\hat{E}=\frac{۱}{۲}.\frac{y}{۳}.x.\sin\hat{E}$$

$$\Rightarrow \text{نسبت مساحت‌ها}=\frac{S_{\overset{\triangle}{EMF}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\left(\frac{y}{۳}\right)(x)\sin\hat{E}}{\frac{۱}{۲}(۳x)\left(\frac{۳y}{۲}\right)\sin\hat{B}}=\frac{\frac{xy}{۳}}{\frac{۹xy}{۲}}=\frac{۲}{۲۷}$$

سوالات منتخب:

اگر در شکل مقابل $۳AM = ۲MB$ باشد، مساحت ناحیه سایه خورده، چه کسری از مساحت متوازی‌الاضلاع است؟

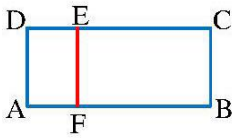


۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$ ✓

گروه آموزشی ماز

13 - در شکل روبه‌رو، دو مستطیل **ABCD** و **ADEF** متشابه هستند. اگر $BC=۵$ و $CE=۲۴$ باشد، محیط مستطیل **BCEF** تقریباً چند برابر محیط مستطیل **ADEF** است؟



۱) ۴/۹۲

۲) ۵/۲۳

۳) ۴/۸۳

۴) ۴/۶۸

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ متوسط)

نکته) اگر دو مستطیل متشابه باشند، نسبت محیط‌ها همان نسبت طول‌ها یا همان نسبت عرض‌هاست.

$$\frac{CD}{AD}=\frac{BC}{DE}\Rightarrow\frac{۲۴+DE}{۵}=\frac{۵}{DE}$$

با فرض $DE = x$ داریم:

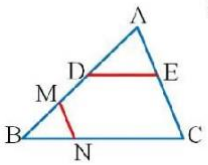
$$\Rightarrow ۲۴x+x^۲=۲۵\Rightarrow x^۲+۲۴x-۲۵=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=-۲۵ \text{ غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

$$\text{محیط } BCEF=۲(BC+EC)=۲(۵+۲۴)=۵۸$$

$$\text{محیط } ADEF=۲(AD+DE)=۲(۵+۱)=۱۲$$

$$\Rightarrow \text{نسبت محیط‌ها}=\frac{۵۸}{۱۲}=\frac{۲۹}{۶}\simeq ۴/۸۳$$

14 – در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ و $MN \parallel AC$ است. اگر M وسط BD بوده و $\frac{MN}{AC}=\frac{۱}{۶}$ باشد، حاصل $\frac{BC}{DE}$ کدام است؟



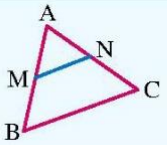
۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۳۵ ـ دشوار)

نکته:

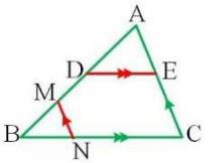
طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC، داریم:



$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

پاسخ تشریحی:

از رابطهٔ $MN \parallel AC$ به کمک تعمیم قضیهٔ تالس، داریم:



$$\frac{MN}{AC}=\frac{BM}{AB}=\frac{۱}{۶} \quad (*)$$

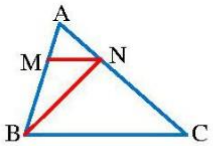
همچنین از رابطهٔ $DE \parallel BC$ نیز به کمک تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AB-BD}{AB}=\frac{AB}{AB}-\frac{BD}{AB}=۱-\frac{۲BM}{AB}\xrightarrow{(*)}\frac{DE}{BC}=۱-۲(\frac{۱}{۶})$$

$$=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{BC}{DE}=\frac{۳}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

15 – در شکل مقابل $MN \parallel BC$ و $\frac{AN}{AC}=\frac{۲}{۷}$ است. مساحت مثلث AMN چند درصد مساحت مثلث MNB است؟

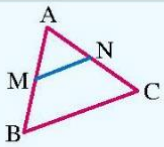


۱) ۴۰ درصد
۲) ۳۵ درصد
۳) ۴۵ درصد
۴) ۳۰ درصد

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۳۴ و ۳۵ ـ دشوار)

نکته:

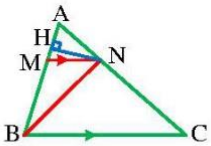
رابطهٔ جزء به کل در قضیهٔ تالس، به صورت زیر است:



$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$

پاسخ تشریحی:

اولاً از رابطهٔ $MN \parallel BC$ طبق قضیهٔ تالس، داریم:



$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{۲}{۷}\Rightarrow\frac{AB}{AM}=\frac{۷}{۲} \quad (*)$$

ثالثاً به کمک رابطهٔ مساحت مثلث، داریم:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{MNB}}}{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times NH\times MB}{\frac{۱}{۲}\times NH\times AM}=\frac{MB}{AM}=\frac{AB-AM}{AM}=\frac{AB}{AM}-\frac{AM}{AM}\xrightarrow{(*)}\frac{S_{\overset{\triangle}{MNB}}}{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}=\frac{۷}{۲}-۱=\frac{۵}{۲}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{AMN}}}{S_{\overset{\triangle}{MNB}}}=\frac{۲}{۵}=۰/۴=۴۰ \text{ درصد}$$

گروه آموزشی ماز

16 – در متوازی‌الاضلاع **ABCD**، زاویهٔ **A** با زاویهٔ منفرجهٔ بین دو قطر، برابر است. نسبت قطر **BD** به ضلع **AB** کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۴۳ ـ متوسط)

نکته۱:

اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر، با هم برابر باشند، آن دو مثلث متشابهند.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{B}=\hat{B}'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{دو زاویه}}\overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{A'B'C'}$$

نکته۲:

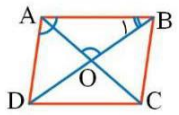
در دو مثلث متشابه، اضلاعی متناسبند که زوایای مقابل آن‌ها با هم برابر است.

نکته۳:

طبق ویژگی طرفین - وسطین در تناسب، داریم: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$

پاسخ تشریحی:

با توجه به اطلاعات مساله و مطابق شکل، داریم:



$D\hat{A}B=A\hat{O}B$

و از آن‌جایی که زاویهٔ $B_۱$ در هر دو مثلث ADB و OAB مشترک است، پس این دو مثلث، به حالت دو زاویه، با هم متشابه هستند و داریم:

$$\overset{\triangle}{ADB}\sim\overset{\triangle}{OAB}\Rightarrow\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{OB}\Rightarrow\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{\frac{۱}{۲}BD}$$

(می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع، قطرها منصف یکدیگرند. پس: $OB=\frac{۱}{۲}BD$)

$$\Rightarrow AB^۲=\frac{۱}{۲}BD^۲\Rightarrow\frac{BD^۲}{AB^۲}=۲\Rightarrow\frac{BD}{AB}=\sqrt{۲}$$

گروه آموزشی ماز

17 – در مثلث **ABC**، **AD** نیمساز زاویهٔ **A** بوده و داریم $\hat{B}=\frac{\hat{A}}{۲}$. اگر $BC=۲AC=۱۲$ باشد، اندازهٔ ضلع **AB** کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۴۳ ـ دشوار)

نکته۱:

اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر با هم برابر باشند، آن دو مثلث متشابهند.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{B}=\hat{B}'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{دو زاویه}}\overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{A'B'C'}$$

نکته۲:

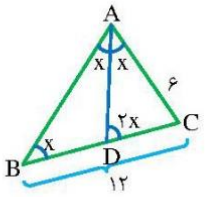
طبق ویژگی طرفین - وسطین در تناسب، داریم: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$

یادآوری:

در هر مثلث، هر زاویهٔ خارجی، برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش.

پاسخ تشریحی:

به کمک اطلاعات مساله و با توجه به شکل، داریم:



$\hat{B} = B\hat{A}D = C\hat{A}D = x$

$A\overset{\triangle}{B}D : A\hat{D}C = x + x = ۲x$
خارجی

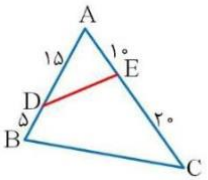
پس دو مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ و $A\overset{\triangle}{D}C$ به حالت دو زاویه با هم متشابهند:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{D} = ۲x \\ \hat{C} \text{ مشترک}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{دو زاویه}} A\overset{\triangle}{B}C \sim A\overset{\triangle}{D}C$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CD} \xrightarrow[AD=BD]{A\overset{\triangle}{D}B \text{ متساوی‌الساقین}} \frac{۱۲}{۶} = \frac{AB}{BD} = \frac{۶}{CD}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲ = \frac{۶}{CD} \Rightarrow CD = ۳ \\ ۲ = \frac{AB}{BD} \Rightarrow ۲ = \frac{AB}{BC - CD} \Rightarrow ۲ = \frac{AB}{۹} \Rightarrow AB = ۱۸ \end{cases}$$

18 – در شکل مقابل، مساحت مثلث $A\overset{\triangle}{D}E$ چه کسری از مساحت چهارضلعی **DECB** است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۴۳ و ۴۶ ـ دشوار)

نکته۱:

هرگاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلثی دیگر متناسب بوده و زاویهٔ بین اضلاع متناسب در دو مثلث با هم برابر باشند، آن دو مثلث متشابهند.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \\ \hat{A} = \hat{A'}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} A\overset{\triangle}{B}C \sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

نکته۲:

در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر است با مربع نسبت تشابه.

$$A\overset{\triangle}{B}C \sim A'\overset{\triangle}{B'}C' \ , \ \frac{AB}{A'B'} = k \Rightarrow \frac{S_{A\overset{\triangle}{B}C}}{S_{A'\overset{\triangle}{B'}C'}} = k^۲$$

نکته۳:

ویژگی تفضیل در مخرج در تناسب، به صورت زیر است:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$$

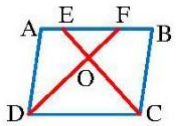
پاسخ تشریحی:

اولاً با توجه به شکل، واضح است که:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AD}{AC}=\frac{۱۵}{۱۰+۲۰}=\frac{۱۵}{۳۰}=\frac{۱}{۲}\\ \frac{AE}{AB}=\frac{۱۰}{۱۵+۵}=\frac{۱۰}{۲۰}=\frac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}\\ \hat{A}\ \text{مشترک}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض‌زض}}\overset{\triangle}{ADE}\sim\overset{\triangle}{ABC}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}S_{\overset{\triangle}{ADE}}=x\\ S_{\overset{\triangle}{ABC}}=۴x\end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}-S_{\overset{\triangle}{ADE}}}=\frac{x}{۴x-x}=\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{DECB}}=\frac{۱}{۳}$$

19 - در شکل مقابل، مساحت مثلث‌های **OEF** و **OCD** به ترتیب ۵ و ۴۵ است. مساحت متوازی‌الاضلاع **ABCD** کدام است؟



۱) ۸۰
۲) ۱۰۰
۳) ۱۱۰
۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحات ٤٣ و ٤٦ ـ دشوار)

نکته۱:
اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر با هم برابر باشند، آن دو مثلث متشابهند.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{B}=\hat{B}'\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{دو زاویه}}\overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{A'B'C'}$$

نکته۲:
در دو مثلث متشابه، اضلاعی متناسبند که زوایای مقابل آن‌ها با هم برابر است.

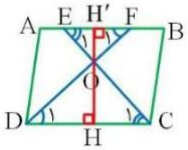
نکته۳:
در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر است با مربع نسبت تشابه.

نکته۴:
در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌های متناظر برابر است با نسبت تشابه.

نکته ۵:
ویژگی ترکیب در صورت در تناسب، بصورت زیر است:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

پاسخ تشریحی:



از آنجایی که $AB \parallel CD$ است، طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب، داریم: $\hat{F}_۱=\hat{D}_۱\ ,\ \hat{E}_۱=\hat{C}_۱$

و در نتیجه دو مثلث $\overset{\triangle}{OEF}$ و $\overset{\triangle}{OCD}$ به حالت دو زاویه با هم متشابهند. پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OEF}}}{S_{\overset{\triangle}{OCD}}}=k^۲\Rightarrow\frac{۵}{۴۵}=k^۲\Rightarrow k^۲=\frac{۱}{۹}\Rightarrow k=\frac{۱}{۳}$$

از طرفی می‌دانیم در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌های متناظر با نسبت تشابه برابر است.

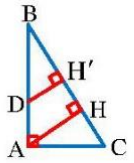
$$\frac{OH'}{OH}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}\frac{OH'+OH}{OH}=\frac{۱+۳}{۳}\Rightarrow\frac{HH'}{OH}=\frac{۴}{۳}\ (*)$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\overset{\triangle}{OCD}}}=\frac{HH'\times\cancel{CD}}{\frac{۱}{۲}\times OH\times\cancel{CD}}=۲\frac{HH'}{OH}\xrightarrow{(*)}۲\times\frac{۴}{۳}=\frac{۸}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{ABCD}}{}=\frac{۸}{}\Rightarrow S_{ABCD}=۴۵\times\frac{۸}{}=۱۲۰$$

20- در شکل مقابل داریم: $\frac{BH}{CH}=۱۵$ و $BH'=CH'$، نسبت $\frac{DH'}{CH}$ چند برابر $\sqrt{۱۵}$ است؟



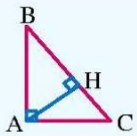
۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۸}{۱۵}$ ۴) $\frac{۸}{۵}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۳۵ و ٤٤ ـ دشوار)

نکته۱:

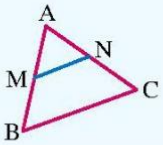
در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، مطابق شکل داریم:



$$AH^۲=BH\times CH$$

نکته۲:

بر طبق تعمیم تالس در مثلث، داریم:



$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

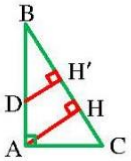
پاسخ تشریحی:

اولاً اگر فرض کنیم $CH=x$، آن‌گاه داریم $BH=۱۵x$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$BC=BH+CH=۱۵x+x=۱۶x$$

از طرفی چون $BH'=CH'$، پس H' وسط BC است و داریم:

$$BH'=\frac{۱}{۲}BC=\frac{۱}{۲}\times ۱۶x=۸x$$



اینک با توجه به رابطهٔ $AH^۲=BH\times CH$، داریم:

$$AH^۲=۱۵x\times x=۱۵x^۲\rightarrow AH=\sqrt{۱۵}x$$

از طرفی طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث $\overset{\triangle}{BAH}$، داریم:

$$AH\parallel DH'\Rightarrow \frac{BH'}{BH}=\frac{DH'}{AH}\rightarrow \frac{۸x}{۱۵x}=\frac{DH'}{\sqrt{۱۵}x}\rightarrow DH'=\frac{۸\sqrt{۱۵}}{۱۵}x$$

$$\rightarrow \frac{DH'}{CH}=\frac{\frac{۸\sqrt{۱۵}}{۱۵}x}{x}=\frac{۸\sqrt{۱۵}}{۱۵}$$

21- برای کدام حکم زیر، نمی‌توان مثال نقض پیدا کرد؟

۱) محل برخورد ۳ ارتفاع مثلث، نقطه‌ای داخل یا خارج مثلث است.

۲) دو خط عمود بر یک خط در فضا با هم موازی‌اند.

۳) در هر مربع، مساحت از محیط بزرگ‌تر است.

۴) اگر دو قطر متوازی‌الاضلاع برابر باشند، متوازی‌الاضلاع یک مستطیل است.

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۳۹ و ٤۰ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

بررسی سایر گزینه‌ها:

برای گزینه ۱، مثال نقض وجود دارد (مثلث قائم‌الزاویه)، برای گزینه ۲، مثال نقض وجود دارد (گوشه سقف یک اتاق را در نظر بگیرید.) برای گزینه ۳، مثال نقض وجود دارد. (به عنوان مثال، مربع با ضلع ۳ را در نظر بگیرید.)

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

گروه آموزشی ماز

22- اگر $\frac{a}{۴}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۶}$ و $۲a-b+c=۲۲$ باشد، مقدار عددی کسر $\frac{a+b+۲x}{۷+x}$ کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۳۱ و ۳۲ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$\frac{a}{۴}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۶}=k \Rightarrow a=۴k\ ,\ b=۳k,\ c=۶k$$

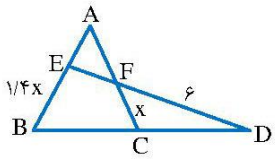
$$۲a-b+c=۲۲ \Rightarrow ۸k-۳k+۶k=۲۲ \Rightarrow ۱۱k=۲۲ \Rightarrow k=۲$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۴}=\frac{b}{۳}=\frac{c}{۶}=۲=\frac{۲x}{x} \Rightarrow \frac{a+b+۲x}{۴+۳+x}=۲$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+۲x}{۷+x}=۲$$

گروه آموزشی ماز

23- در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، داریم: $AB=AC$، مقدار EF کدام است؟



۱) ۲/۶

۲) ۲/۴

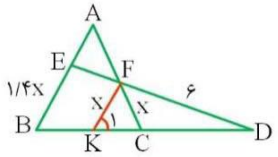
۳) ۲/۸

۴) ۲/۲

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۳٤ تا ۳٦ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا از نقطه F پاره‌خط FK را موازی با EB رسم می‌کنیم:



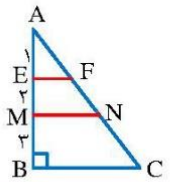
$$\left.\begin{array}{l} AB=AC \Rightarrow \hat{C}=\hat{B} \\ FK \parallel EB \Rightarrow \hat{K}_۱=\hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{K}_۱=\hat{C} \Rightarrow FK=FC=x$$

$$FK \parallel EB \Rightarrow \frac{FK}{EB}=\frac{FD}{ED} \Rightarrow \frac{x}{۱/۴x}=\frac{۶}{۶+EF}$$

$$\Rightarrow \frac{۶}{۶+EF}=\frac{۱}{۱/۴}=\frac{۵}{۷} \Rightarrow ۳۰+۵EF=۴۲ \Rightarrow EF=\frac{۱۲}{۵}=\frac{۲۴}{۱۰}=۲/۴$$

گروه آموزشی ماز

24- در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$، خطوط EF و MN مطابق شکل موازی قاعده $BC=۳$ هستند. مساحت ذوزنقه EFNM کدام است؟



۱) $\frac{۷}{۲}$

۲) $\frac{۵}{۲}$

۳)

۴)

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ _ صفحات ۳٤ تا ۳٦ _ متوسط)

پاسخ تشریحی:

با توجه به تالس داریم:

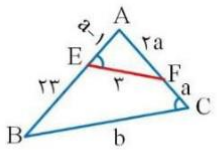
$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{EF}{۳}=\frac{۱}{۶} \Rightarrow EF=\frac{۱}{۲}$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{MN}{۳}=\frac{۳}{۶} \Rightarrow MN=\frac{۳}{۲}$$

$$S=\frac{(\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲})\times ۲}{۲}=۲$$

گروه آموزشی ماز

25- در مثلث مقابل، زوایای $A\hat{E}F$ و $A\hat{C}B$ برابرند. مقدار $a+b$ کدام است؟ $(a\in\mathbb{N})$



۱) ۲۰

۲) ۱۹

۳) ۲۲

۴) ۲۶

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ _ صفحات ٤۲ تا ٤۵ _ ساده)

پاسخ تشریحی:

$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A} \text{ مشترک} \\ A\hat{E}F=A\hat{C}B\end{cases} \longrightarrow \overset{\triangle}{AEF} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

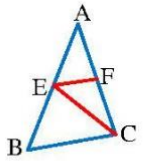
$$\Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AB}=\frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{a-۱}{۲a+a}=\frac{۲a}{۲۳+a-۱}=\frac{EF}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{a-۱}{۳a}=\frac{۲a}{۲۲+a}=\frac{۳}{b} \Rightarrow ۲۲a-۲۲+a^۲-a=۶a^۲$$

$$\Rightarrow ۵a^۲-۲۱a+۲۲=۰ \xrightarrow{a\in\mathbb{N}} a=۲ \Rightarrow \frac{۱}{۶}=\frac{۳}{b} \Rightarrow b=۱۸ \Rightarrow a+b=۲۰$$

گروه آموزشی ماز

26- در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم $EF \parallel BC$، مساحت مثلث $\overset{\triangle}{AEF}$، $\frac{۵}{۶}$ برابر مساحت مثلث $\overset{\triangle}{EFC}$ است. مساحت مثلث $\overset{\triangle}{BEC}$ چند برابر مساحت مثلث $\overset{\triangle}{AEF}$ است؟



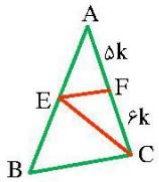
۱) $\frac{۶۸}{۲۵}$ ۲) $\frac{۶۶}{۲۵}$

۳) $\frac{۶۶}{۲۷}$ ۴) $\frac{۶۸}{۲۷}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ _ صفحات ۳٤ تا ۳٦ _ متوسط)

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم وقتی دو مثلث دارای ارتفاع یکسان هستند، نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده آن‌ها است و برعکس.

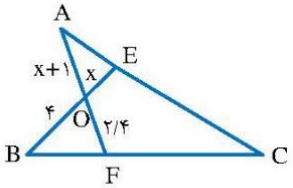


$$S_{\overset{\triangle}{AEF}} = \frac{۵}{۶} S_{\overset{\triangle}{EFC}} \Rightarrow AF = \frac{۵}{۶} FC \Rightarrow AF = \frac{۵}{۱۱} AC \Rightarrow EF = \frac{۵}{۱۱} BC \Rightarrow BC = \frac{۱۱}{۵} EF$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\triangle}{BEC}} = \frac{۱۱}{۵} S_{\overset{\triangle}{EFC}} = \frac{۱۱}{۵} \times \frac{۶}{۵} S_{\overset{\triangle}{AEF}} = \frac{۶۶}{۲۵} S_{\overset{\triangle}{AEF}}$$

گروه آموزشی ماز

27- در شکل زیر، دو مثلث $\overset{\triangle}{OAE}$ و $\overset{\triangle}{OBF}$ متشابه هستند. نسبت مساحت این دو مثلث برابر کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲)

۳) $\frac{۱۶}{۲۵}$ ۴) $\frac{۶۴}{۲۵}$

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ _ صفحات ٤۲ تا ٤۵ _ متوسط)

پاسخ تشریحی:

AE موازی خط BF نیست. پس:

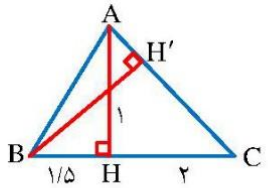
$$\frac{AO}{OB} = \frac{EO}{OF} \Rightarrow \frac{x+۱}{۴} = \frac{x}{۲/۴} \Rightarrow ۲/۴x + ۲/۴ = ۴x \Rightarrow ۱/۶x = ۲/۴ \Rightarrow x = ۱/۵$$

$$k = \text{نسبت تشابه} = \frac{EO}{OF} = \frac{x}{۲/۴} = \frac{۱/۵}{۲/۴} = \frac{۵}{۸} \Rightarrow k^۲ = \frac{۲۵}{۶۴}$$

پاسخ گزینه ۴ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

28- مطابق شکل در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، ارتفاع‌های AH و BH' را رسم کرده‌ایم. مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ کدام است؟

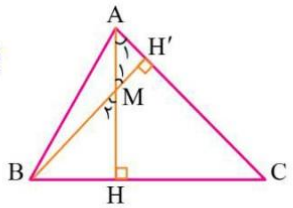


۱) ۵/۲۵
۲) ۵/۷۵
۳) ۶/۲۵
۴) ۶/۷۵

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۴۲ تا ۴۵ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

$$\begin{cases} \overset{\triangle}{AMH'}: \hat{A}_1+\hat{M}_1=90^\circ \\ \overset{\triangle}{AHC}: \hat{A}_1+\hat{C}=90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{M}_1=\hat{C} \xrightarrow{\hat{M}_1=\hat{M}_2} \hat{M}_1=\hat{M}_2=\hat{C}$$

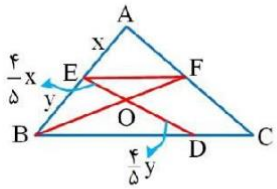


$$\Rightarrow \overset{\triangle}{AHC} \sim \overset{\triangle}{MBH} \Rightarrow \frac{AH}{BH}=\frac{HC}{MH} \Rightarrow \frac{AH}{1/5}=\frac{2}{1} \Rightarrow AH=3$$

$$\Rightarrow S=\frac{3\times 3/5}{2}=5/25$$

گروه آموزشی ماز

29- در شکل مقابل، $EF \parallel BC$ و $2y=3x$ است. اگر $BD=3/75$ باشد، مقدار DC کدام است؟



۱) ۲/۷۵
۲) ۲/۱۵
۳) ۲/۵
۴) ۲/۲۵

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۳۴ تا ۳۶ و ۴۲ تا ۴۵ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

باتوجه به تالس در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:

$$2y=3x \Rightarrow y=\frac{3}{2}x$$

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{x}{x+y}=\frac{x}{x+\frac{3}{2}x}=\frac{x}{\frac{5}{2}x}=\frac{2}{5} \Rightarrow EF=\frac{2}{5}BC \quad (1)$$

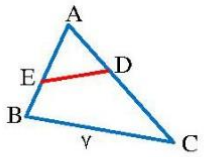
$$\overset{\triangle}{EOF} \sim \overset{\triangle}{OBD} \Rightarrow \frac{EF}{BD}=\frac{\frac{4}{5}x}{\frac{4}{5}y}=\frac{x}{y}=\frac{x}{\frac{3}{2}x}=\frac{2}{3} \Rightarrow EF=\frac{2}{3}BD \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{2}{5}BC=\frac{2}{3}BD \Rightarrow BC=\frac{5}{3}BD$$

$$DC=BC-BD=\frac{5}{3}BD-BD=\frac{2}{3}BD=\frac{2}{3}\times 3/75=\frac{2}{3}\times\frac{15}{4}=\frac{5}{2}=2/5$$

گروه آموزشی ماز

30- در مثلث مقابل، تناسب‌های $\frac{AE}{۲}=\frac{۳EB}{۲}=\frac{۳AD}{۴}=\frac{۳DC}{۸}$ برقرارند. اندازه **ED** چقدر است؟



۱)
۲)
۳) ۳/۵
۴) ۳/۷۵

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۴۲ تا ۴۶ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

از تناسب‌ها، نتیجه می‌گیریم:

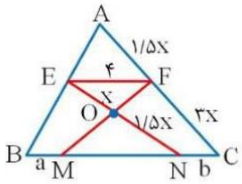
$$AE=۲k\ ,\ EB=\frac{۲k}{۳}\ ,\ AD=\frac{۴k}{۳}\ ,\ DC=\frac{۸k}{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AE}{AD+DC}=\frac{۲k}{\frac{۴k}{۳}+\frac{۸k}{۳}}=\frac{۲k}{\frac{۱۲k}{۳}}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\\ \frac{AD}{AE+EB}=\frac{\frac{۴k}{۳}}{۲k+\frac{۲k}{۳}}=\frac{\frac{۴k}{۳}}{\frac{۸k}{۳}}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AE}{AD+DC}=\frac{AD}{AE+EB}=\frac{۱}{۲}$$

مثلث‌های $\overset{\triangle}{AED}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابه هستند. $\Rightarrow\frac{ED}{BC}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{BC=۷}ED=\frac{۷}{۲}=۳/۵$

گروه آموزشی ماز

31- در شکل زیر، $EF\parallel BC$ است. مقدار کدام است؟



۱) ۵/۵
۲) ۶/۵
۳)
۴)

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۴۲ تا ۴۶ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

با توجه به تشابه مثلث‌ها داریم:

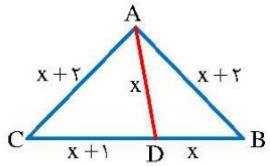
$$\overset{\triangle}{AEF}\sim\overset{\triangle}{ABC}\Rightarrow\frac{EF}{BC}=\frac{۱/۵x}{۱/۵x+۳x}\Rightarrow\frac{۴}{BC}=\frac{۱/۵x}{۴/۵x}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow BC=۱۲$$

$$\overset{\triangle}{OEF}\sim\overset{\triangle}{OMN}\Rightarrow\frac{EF}{MN}=\frac{EO}{ON}\Rightarrow\frac{۴}{MN}=\frac{x}{۱/۵x}=\frac{۱}{۱/۵}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow MN=۶$$

$$a+MN+b=BC\Rightarrow a+b=BC-MN=۱۲-۶=۶$$

گروه آموزشی ماز

32- در شکل مقابل، محیط مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ کدام است؟

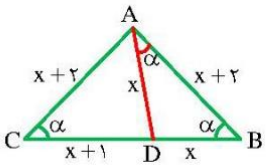


۱) ۱۹
۲) ۲۰
۳) ۲۱
۴) ۲۲

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۴۲ تا ۴۵ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

توجه کنید که مثلث‌های $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{ABD}$ متساوی‌الساقین هستند. بنابراین مطابق شکل مقابل، دو زاویه از هر کدام از این مثلث‌ها برابر α است و این مثلث‌ها متشابهند. پس:



$$\frac{x}{x+۲}=\frac{x+۲}{x+x+۱}\Rightarrow\Rightarrow x(۲x+۱)=(x+۲)^۲\Rightarrow ۲x^۲+x=x^۲+۴x+۴$$

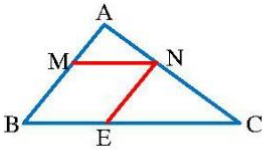
$$\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow(x+۱)(x-۴)=۰\Rightarrow x=۴$$

بنابراین:

$$AB=۶\ ,\ AC=۶\ ,\ BC=۹\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\ \text{محیط}=۶+۶+۹=۲۱$$

گروه آموزشی ماز

33- در شکل مقابل، چهارضلعی MNEB لوزی است و مساحت آن $\frac{۱}{۵}$ مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است. مقدار $\frac{AB}{MB}$ کدام است؟

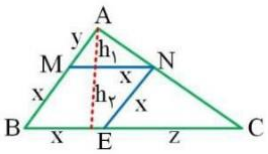


۱) $۵\pm\sqrt{۱۵}$
۲) $۵\pm\sqrt{۵}$
۳) $۳\pm\sqrt{۵}$
۴) $۳\pm\sqrt{۱۵}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۳۱ تا ۳۶ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

مطابق شکل مقابل و مطابق قضیهٔ تالس و تعمیم آن:



$$MN\parallel BE\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{h_۲}{h_۱}\ (۱)$$

$$MN\parallel BC\Rightarrow\frac{x}{x+z}=\frac{y}{x+y}\Rightarrow x^۲+xy=xy+yz\Rightarrow x^۲=yz$$

از طرف دیگر:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=۵S_{MNEB}\Rightarrow\frac{(h_۱+h_۲)BC}{۲}=۵h_۲BE$$

$$\frac{(h_۱+h_۲)}{۲}(x+\frac{x^۲}{y})=۵h_۲x\Rightarrow\frac{(h_۱+h_۲)}{۲}(۱+\frac{x}{y})=۵h_۲\ (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow\frac{(h_۱+h_۲)}{۲}(۱+\frac{h_۲}{h_۱})=۵h_۲\Rightarrow(h_۱+h_۲)^۲=۱۰h_۱h_۲\Rightarrow h_۱^۲+h_۲^۲+۲h_۱h_۲=۱۰h_۱h_۲$$

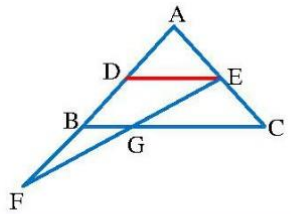
$$\Rightarrow h_۱^۲+h_۲^۲-۸h_۱h_۲=۰\xrightarrow{\div h_۱h_۲}\frac{h_۱}{h_۲}+\frac{h_۲}{h_۱}-۸=۰\xrightarrow{\frac{h_۱}{h_۲}=t}t+\frac{۱}{t}-۸=۰\Rightarrow t^۲-۸t+۱=۰$$

$$t=\frac{۸\pm۲\sqrt{۱۵}}{۲}\Rightarrow\frac{h_۱}{h_۲}=\frac{۸\pm۲\sqrt{۱۵}}{۲}\Rightarrow\frac{y}{x}=\frac{۸\pm۲\sqrt{۱۵}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱+\frac{y}{x}=۱+\frac{۸\pm۲\sqrt{۱۵}}{۲}\Rightarrow\frac{x+y}{x}=\frac{۱۰\pm۲\sqrt{۱۵}}{۲}\Rightarrow\frac{AB}{MB}=۵\pm\sqrt{۱۵}$$

گروه آموزشی ماز

34- در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ است. اگر E وسط ضلع AC و $\frac{GC}{BG} = ۳$ باشد، FB چند برابر AD است؟



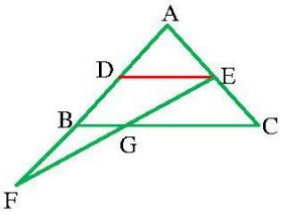
۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) ۱
۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۳۴ تا ۳۷ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

با فرض $BG = x$، داریم: $GC = ۳x$، پس $BC = ۴x$ است.

طبق قضیه تالس در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:



$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{۴x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow DE = ۲x$$

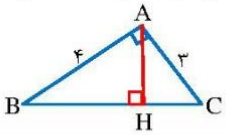
طبق قضیه تالس در مثلث $\overset{\triangle}{FDE}$:

$$\frac{BG}{DE} = \frac{FB}{FD} \Rightarrow \frac{x}{۲x} = \frac{FB}{FD} \Rightarrow \frac{FB}{FD} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow FB = BD$$

از تالس در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ معلوم است که $BD = AD$، پس: $FB = AD$.

گروه آموزشی ماز

35- در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$، ارتفاع AH رسم شده است. طول شعاع دایره‌ای که در مثلث $\overset{\triangle}{AHC}$ بر هر سه ضلع آن مماس است، کدام است؟



۱) ۰/۴
۲) ۱
۳) ۰/۸
۴) ۰/۶

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۲ ـ صفحات ٤۲ تا ٤٥ ـ دشوار)

نکته:

در مثلث قائم‌الزاویه با رسم ارتفاع وارد بر وتر داریم:

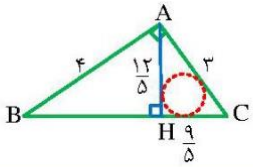
$$AH^۲ = BH.HC$$

$$AB^۲ = BH.BC$$

$$AC^۲ = HC.BC$$

$$AH = \frac{AB.AC}{BC}$$

پاسخ تشریحی:



$$AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{۴ \times ۳}{۵} = \frac{۱۲}{۵}$$

$$AC^۲ = HC.BC \Rightarrow ۹ = HC \times ۵ \Rightarrow HC = \frac{۹}{۵}$$

نکته:

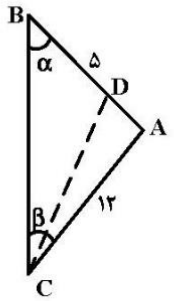
دایره‌ای که داخل مثلث بر هر سه ضلع آن مماس است، دایره محاطی نام دارد. شعاع آن برابر $r = \frac{S}{P}$ است که S مساحت و P نصف محیط مثلث است.

$$S = \frac{\frac{۱۲}{۵} \times \frac{۹}{۵}}{۲} = \frac{۵۴}{۲۵}, \quad P = \frac{۳ + \frac{۹}{۵} + \frac{۱۲}{۵}}{۲} = \frac{۱۸}{۵}, \quad r = \frac{\frac{۵۴}{۲۵}}{\frac{۱۸}{۵}} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

www.mapedu.ir

۱-گزینه ۴ درست است.



$$\tan\alpha = ۲/۴ \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱}{۱+\tan^۲ x} = \frac{۵^۲}{۱۳^۲} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$$

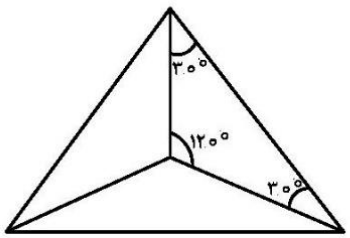
پس مثلث قائم الزاویه و در شکل مقابل β زاویه کوچکتر است. نیمساز زاویه β ضلع مقابل را نسبت به اضلاع زاویه تقسیم می‌کند.

$$\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}} = \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} = \frac{۱۲}{۱۳} \Rightarrow \frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \frac{۱۲}{۲۵} = ٪۴۸$$

پس ۴۸ درصد مساحت کل مثلث است.

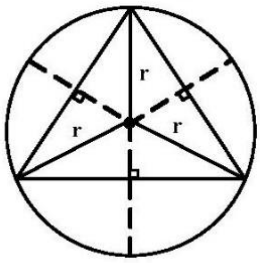
۲- گزینه ۳ درست است.

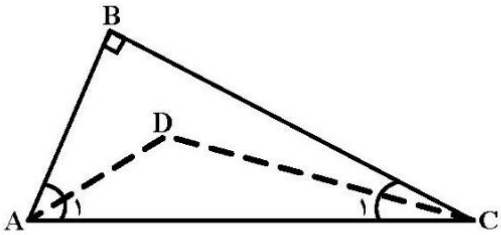
الف) در مثلث متساوی الاضلاع از برخورد نیمسازها سه مثلث هم‌نهشت ایجاد می‌شود که دو زاویه ۳۰° و که زاویه ۱۲۰° دارد.



ب) ۱ رادیان حدوداً ۵۷° است، پس دو زاویه مقابل دو ساق حدوداً ۶۱° است. $(۵۷^\circ < ۶۱^\circ)$ پس قاعده که روبه‌رو به زاویهٔ کوچکتر است، کوچکترین ضلع است.

ج) نقطه تلاقی عمود منصف‌ها از سه راس مثلث به یک فاصله است، پس مرکز دایره‌ای است که از سه راس مثلث می‌گذرد.





د) $\hat{D} = ۱۸۰ - (\frac{B}{۲} + \frac{C}{۲}) = ۱۸۰ - \frac{۹۰}{۲} = ۱۳۵^\circ$

۳- گزینه ۱ درست است.

دو مثلث در شکل پرسش متشابه‌اند پس $\frac{x+۲}{x+۵}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow ۵x=۲$ یا $x=۰/۴$

۴. گزینه ۲ درست است.

در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم

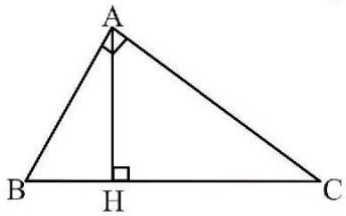
$$\cos C=\frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{۱۱}{\sqrt{۱۷۰}}=\frac{۱۱}{BC}$$

$$(BC=\sqrt{۱۷۰}, AC=۱۱) \Rightarrow AB^۲=۱۷۰-۱۲۱=۴۹ \Rightarrow AB=۷$$

۵. گزینه ۴ درست است.

نقطه تلاقی هر سه نیمساز داخلی ـ نقطه تلاقی یک نیمساز داخلی و دو نیمساز زاویه خارجی دیگر که در خارج در ضلع مثلث است. در نتیجه $۱+۳=۴$ نقطه موجود است.

۶. گزینه ۴ درست است.



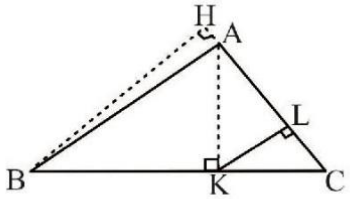
$$HC=x \Rightarrow BH=۷/۵-x \ , \ AH^۲=BH\times HC$$

$$\Rightarrow ۳/۶^۲=(۷/۵-x)\times x \Rightarrow x=۴/۸$$

$$AC=\sqrt{۳/۶^۲+۴/۸^۲}=۱/۲\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۱/۲\times ۵=۶$$

۷. گزینه ۴ درست است.

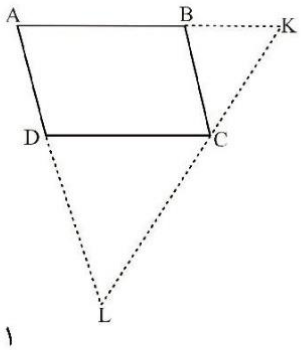
دو مثلث $\overset{\Delta}{AKC}$ و $\overset{\Delta}{BHC}$ متشابه با نسبت تشابه $\frac{BC}{AC}=۵$ هستند.



$$\frac{S_{BHC}}{S_{AKC}}=۵^۲ \ , \ \frac{S_{BHC}}{\frac{۱}{۲}\times ۱\times ۲}=۵^۲ \Rightarrow S_{BHC}=۲۵$$

۸. گزینه ۱ درست است.

بنابر رابطه جزء به کل تالس داریم: $\overset{\Delta}{AKL}$

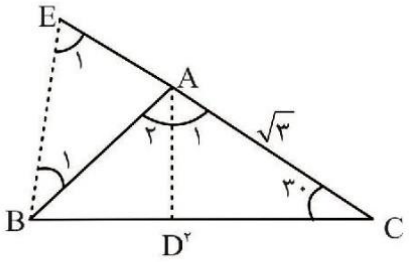


$$BC \parallel AL \Rightarrow \frac{BK}{AK}=\frac{CK}{KL}$$

$$AK \parallel DC \Rightarrow \frac{DL}{AL}=\frac{CL}{KL}$$

$$\Rightarrow \frac{BK}{AK}+\frac{DL}{AL}=\frac{CK+CL}{KL}=۱$$

۹. گزینه ۳ درست است.



مثلث مورد نظر قائم‌الزاویه، نیمساز کوچک‌تر وارد بر وتر است. از رأس B در شکل زیر خطی موازی نیمساز رسم می‌کنیم تا امتداد AC را در E قطع کند. مثلث $\overset{\Delta}{ABE}$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

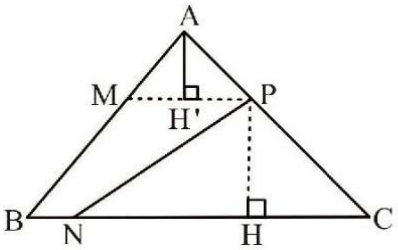
$$AD \parallel EB \text{ , } AB \text{ , } AE \text{ مورب} \Rightarrow \hat{E}_۱ = \hat{B}_۱ = \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$$

$$\Rightarrow AE = AB = ۱ \text{ , } EB = \sqrt{۲}$$

بنابر روابط تالس داریم:

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AD}{EB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}} = \frac{AD}{\sqrt{۲}} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{۶}(\sqrt{۳}-۱)}{۲} = \frac{۳\sqrt{۲}-\sqrt{۶}}{۲}$$

۱۰. گزینه ۲ درست است.



$$MP \parallel BC \Rightarrow \frac{AH'}{PH} = \frac{۱}{۳} \text{ , } \frac{MP}{BC} = \frac{۱}{۱+۳} = \frac{۱}{۴}$$

$$NC = \frac{۴}{۵}BC \Rightarrow \frac{MP}{NC} = \frac{۵}{۱۶}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{NPC}}{S_{AMP}} = \frac{NC \times PH}{AH' \times MP} = \frac{۱۶}{۵} \times ۳ = \frac{۴۸}{۵} = ۹/۶$$

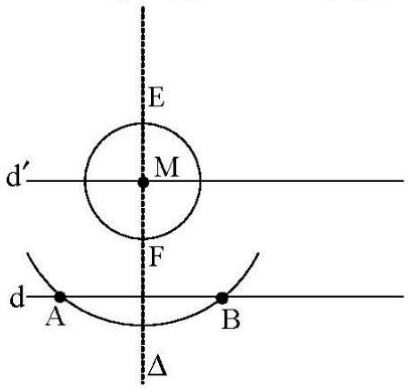
۱۱. گزینه ۲ درست است.

$$\left.\begin{array}{l} PM \,||\, NB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{۱}{۳} = \frac{AM}{MB} \\ MN \,||\, BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{۱+۳}{x} = \frac{AM}{MB} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{۴}{x} \quad \boxed{x = ۱۲}$$

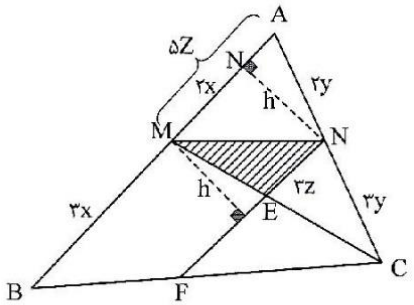
$$\Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۴}{۱۶} = \frac{MN}{BC} \qquad \boxed{\frac{BC}{MN} = ۴}$$

۱۲- گزینه ۴ درست است.

ابتدا به مرکز M نقطهٔ خارج خط d دایره‌ای (*) چنان رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه A و B قطع کند. به مرکز A (*) و به مرکز B (*) دایره‌هایی با شعاع برابر $(r > \frac{AB}{۲})$ رسم می‌کنیم تا همدیگر را در دو نقطه قطع کنند. خط گذرنده از این دو نقطه و M بر خط d عمود است. (خط Δ) به مرکز M دایره‌ای (*) با شعاع کاملاً دلخواه می‌زنیم تا خط Δ را دو نقطه E و F قطع کند. به مراکز E (*) و F (*) دو دایره با شعاع برابر $(r' > \frac{EF}{۲})$ می‌زنیم تا همدیگر را در دو نقطه قطع کنند. با خط‌کش خط گذرنده از این دو نقطه و M را رسم می‌کنیم (خط d'). خط d' بر Δ عمود است و چون دو خط عمود بر یک خط موازی هستند پس d' موازی d از نقطه M رسم شده است. تعداد ستاره‌ها در متن جواب فوق همان تعداد کمان‌ها یا دایره‌های رسم شده است که برابر ۶ می‌باشد.



۱۳ گزینه ۱ درست است.



اگر نسبت تشابه k باشد نسبت مساحت‌ها $k^۲$ می‌شود، بنابراین:

$$\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = (\frac{۲}{۵})^۲ = \frac{۴}{۲۵}$$

از طرف دیگر:

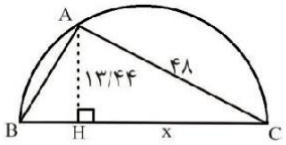
$$NE \| AM \rightarrow \overset{\Delta}{NEC} \sim \overset{\Delta}{AMC} \rightarrow \frac{NE}{AM} = \frac{۳z}{۵z} = \frac{۳}{۵}$$

فاصله دو خط موازی را h در نظر می‌گیریم: $\frac{S_{\overset{\Delta}{MEN}}}{S_{\overset{\Delta}{AMN}}} = \frac{\frac{۱}{۲}NE \times h}{\frac{۱}{۲}AM \times h} = \frac{NE}{AM} = \frac{۳}{۵}$

$$\text{درصد}\ \frac{S_{\overset{\Delta}{MEN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{S_{\overset{\Delta}{MEN}}}{\cancel{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}} \times \frac{\cancel{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} \times ۱۰۰ = \frac{۳}{۵} \times \frac{۴}{۲۵} \times ۱۰۰ = \%۹/۶$$

۱۴.گزینه ۱ درست است.

چون زاویه $\hat{A}$ روبرو به قطر دایره است، پس قائمه می‌باشد.



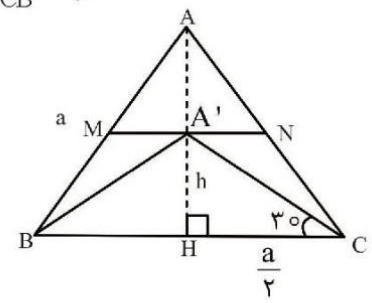
$$x^{۲} = ۴۸^{۲} - ۱۳/۴۴^{۲} \Rightarrow x = ۴۶/۰۸$$

$$۴۸^{۲} = ۴۶/۰۸ \times BC \Rightarrow BC = ۵۰$$

۱۵.گزینه ۳ درست است.

$$A'H = \frac{a}{۲} \times \tan ۳۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a \,, AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$\frac{BC}{MN} = \frac{AH}{AA'} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۶}} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = (\frac{۳}{۲})^{۲} = \frac{۹}{۴} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{MNCB}} = \frac{۹}{۵} = ۱/۸$$

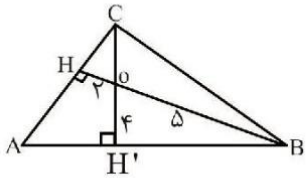


۱۶- گزینه ۲ درست است.

چون $\frac{۶}{۲+۲۲} = \frac{۲}{۲+۶}$ و یک زاویه برابر دارند، پس دو مثلث متشابه هستند.

$$\frac{x}{۲۰} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x = ۵$$

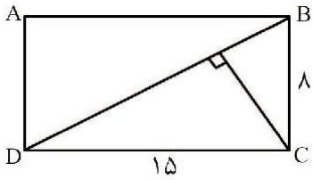
۱۷.گزینه ۲ درست است.



$$\overset{\Delta}{OCH} \sim \overset{\Delta}{OBH'} \Rightarrow \frac{CH'-۴}{۵} = \frac{۲}{۴}$$

$$\Rightarrow CH' = ۶/۵$$

۱۸-گزینه ۲ درست است.



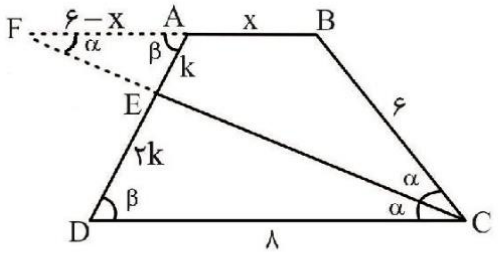
$$BD = ۱۷ \Rightarrow ۱۵^{۲} = ۱۷ \times x \Rightarrow x \simeq ۱۳/۲$$

۱۹- گزینه ۱ درست است.

چون $DO^{۲} = AO \times OC$ پس DO ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه ADC است. مثلث BOC در رأس O قائمه است و داریم:

$$BC^{۲} = ۲^{۲} + ۴^{۲} = ۲۰ \Rightarrow BC = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

۲۰- گزینه ۲ درست است.



CE را امتداد می‌دهیم تا امتداد قاعدهٔ AB را در F قطع کند، مثلث FBC متساوی‌الساقین است، با فرض $AB = x$ اندازه‌ها به صورت مقابل است. دو مثلث AEF و DEC با دو زاویهٔ برابر متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AF}{CD} = \frac{AE}{DE} \Rightarrow \frac{۶ - x}{۸} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۶ - x = ۴ \Rightarrow x = ۲$$

۲۱- گزینه ۲ درست است.

با توجه به این که $\frac{S_{CDE}}{S_{ABE}} = \frac{۱۲}{۳} = ۴$، پس اگر $AB = a$ باشد، $CD = ۲a$ خواهد بود. از طرفی داریم:

$$\frac{۱}{FE} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{۲a} \Rightarrow \frac{۱}{FE} = \frac{۳}{۲a} \Rightarrow FE = \frac{۲}{۳}a$$

حال مثلث‌های ABE و BEF هم ارتفاع هستند، پس:

$$\frac{S_{BEF}}{S_{ABE}} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow \frac{S_{BEF}}{۳} = \frac{\frac{۲}{۳}a}{a} \Rightarrow S_{BEF} = ۲$$

۲۲- گزینه ۳ درست است.

به کمک قضیهٔ تالس تعمیم یافته داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{\frac{۵}{۲}DE} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{۲}{۵}$$

از طرفی به کمک قضیهٔ تالس تعمیم یافته در مثلث ABE داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow \frac{AF}{AE} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow AF = ۲k \ , \ AE = ۵k \Rightarrow FE = ۳k$$

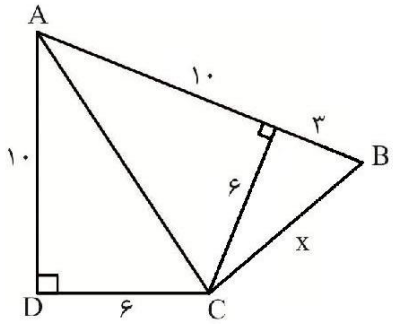
حال با بکارگیری دوبارهٔ قضیهٔ تالس در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{۵k}{AC} \Rightarrow AC = ۱۲/۵k \Rightarrow CE = ۷/۵k$$

بنابراین داریم:

$$\frac{AE}{CF} = \frac{۵k}{۷/۵k + ۳k} = \frac{۵}{۱۰/۵} = \frac{۱۰}{۲۱}$$

۲۳. گزینه ۱ درست است.



از C بر AB عمود می‌کنیم. چون C روی نیمساز زاویهٔ DAB است پس $CD = CH = ۶$ و $AH = ۱۰$ می‌باشند. حال به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث CHB داریم:

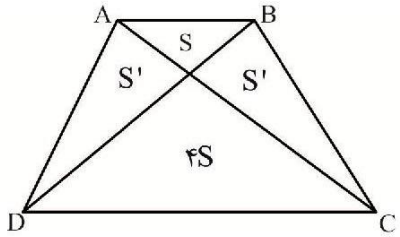
$$x^۲ = ۶^۲ + ۳^۲ \Rightarrow x^۲ = ۴۵ \Rightarrow x = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$$

۲۴. گزینه ۴ درست است.

دو مثلث ADE و ABC مشابه‌اند. پس:

$$\frac{S}{۲S} = (\frac{DE}{۸})^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{DE^۲}{۶۴} \Rightarrow DE^۲ = ۳۲ \Rightarrow DE = ۴\sqrt{۲}$$

۲۵- گزینه ۲ درست است.



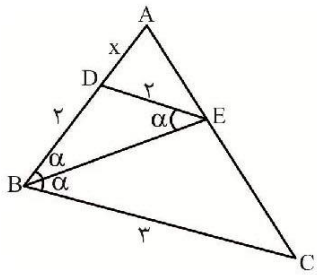
مثلث‌های DAB و DAC هم ارتفاع هستند، پس نسبت مساحت‌های آنها با نسبت قاعده‌هایشان برابر است. پس $CD = ۲AB$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$S'^۲ = ۴S \times S \Rightarrow S' = ۲S$$

از طرفی $S_{DAB} = S + S'$ است، پس:

$$S' + S = ۶ \Rightarrow S' + \frac{S'}{۲} = ۶ \Rightarrow S' = ۴$$

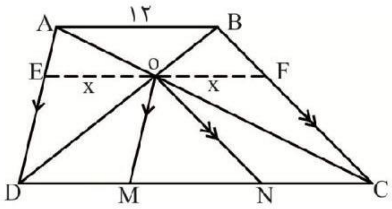
۲۶. گزینه ۳ درست است.



طبق قضیه خطوط موازی و مورب زاویهٔ E با زاویهٔ B در مثلث BDE برابر است، پس این مثلث متساوی‌الساقین می‌باشد. حال به کمک قضیهٔ تالس تعمیم یافته داریم:

$$\Rightarrow x = ۴ \Rightarrow AB = ۴ + ۲ = ۶ \quad \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{x}{x+۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۳x = ۲x + ۴$$

۲۷- گزینه ۴ درست است.



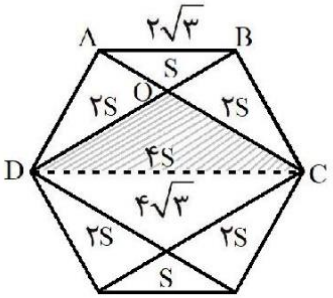
از محل تلاقی قطرها خطی به موازات قاعده‌ها رسم می‌کنیم و داریم:

$$\frac{۱}{x} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{۱}{x} = \frac{۵+۳}{۶۰} \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۲}$$

$$\begin{cases} EO = DM \\ OF = NC \end{cases} \xrightarrow{EO=OF} DM = NC = x = \frac{۱۵}{۲}$$

$$MN = ۲۰ - (\frac{۱۵}{۲} + \frac{۱۵}{۲}) = ۵$$

۲۸- گزینه ۳ درست است.



با رسم قطر بزرگ شش ضلعی منتظم دو ذوزنقه ایجاد می‌شود که داریم:

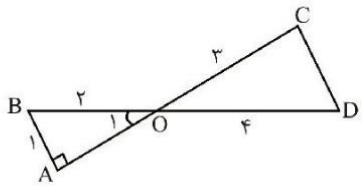
$$\text{محیط} = ۱۲\sqrt{۳} \Rightarrow \text{طول ضلع} = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow \text{قطر بزرگ} = ۴\sqrt{۳}$$

با توجه به روابط $S_{AOB} \times S_{DOC} = S_{AOD} \times S_{BOC}$ و $S_{AOD} = S_{BOC}$ و هم‌چنین تشابه مثلث‌های AOB و DOC با نسبت تشابه ۲، مساحت‌ها در ذوزنقه و در نتیجه شش‌ضلعی منتظم به صورت‌های مقابل است و داریم:

$$\frac{S_{\text{رنگی}}}{S_{\text{ذوزنقه}}} = \frac{۸S}{۱۸S} = \frac{۴}{۹}$$

$$S_{\text{رنگی}} = \frac{۴}{۹} \times (۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times (۲\sqrt{۳})^۲) = \frac{۴}{۹} \times ۱۸\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳}$$

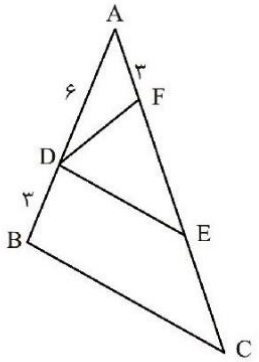
۲۹- گزینه ۱ درست است.



$$\sin \hat{O}_۱ = \frac{۱}{۲} = \sin ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۳۰^\circ = \hat{O}_۲$$

$$S_{\overset{\Delta}{OCD}} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴ \times \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴ \times \frac{۱}{۲} = ۳$$

۳۰- گزینه ۲ درست است.



$$\begin{cases} \hat{F}_۱ = \hat{B} \\ \hat{A} \ \text{مشترک} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ADF} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{DF}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{۶}{AC} = \frac{۳}{۹} \Rightarrow AC = ۱۸$$

رابطهٔ تالس : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{AC - EC}{EC} \Rightarrow \frac{۶}{۳} = \frac{۱۸ - EC}{EC}$

$$۶EC = ۵۴ - ۳EC \Rightarrow ۹EC = ۵۴ \Rightarrow EC = ۶$$

$$EF = ۱۸ - (۳ + ۶) = ۹$$

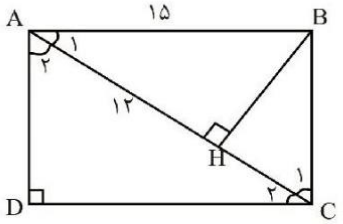
۳۱- گزینه ۱ درست است.

$$\begin{cases} S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{AB \times AC}{۲} \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{BC \times AH}{۲} \end{cases} \Rightarrow AB \times AC = BC \times AH \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{AB^۲}{BC^۲} = \frac{AH^۲}{AC^۲}, AH^۲ = AC^۲ - CH^۲$$

$$\frac{AB^۲}{BC^۲} = \frac{AC^۲ - CH^۲}{AC^۲} = ۱ - \frac{CH^۲}{AC^۲} \Rightarrow \frac{AB^۲}{BC^۲} + \frac{CH^۲}{AC^۲} = ۱$$

۳۲.گزینه ۲ درست است.



$$BH^{۲}=۱۵^{۲}-۱۲^{۲}=۲۲۵-۱۴۴=۸۱\Rightarrow BH=۹$$

$$\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ADC}:\hat{H}=\hat{D}=۹۰^{\circ},\hat{A}_{۱}=\hat{C}_{۲}$$

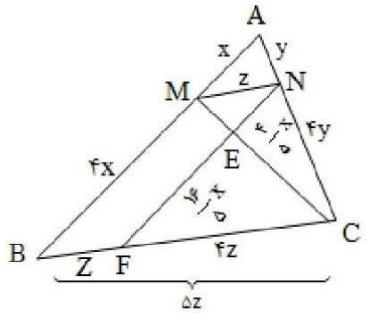
$$\frac{AB}{AC}=\frac{BH}{AD}=\frac{AH}{CD}$$

$$\frac{۱۵}{AC}=\frac{۹}{AD}=\frac{۱۲}{۱۵}\Rightarrow\begin{cases}AC=\frac{۱۵\times۱۵}{۱۲}=۱۸/۷۵\\ AD=\frac{۹\times۱۵}{۱۲}=\frac{۴۵}{۴}=۱۱/۲۵\end{cases}$$

$$HC=۱۸/۷۵-۱۲=۶/۷۵$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{BHC}}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{۶/۷۵\times۹}{۲}}{۱۱/۲۵\times۱۵}=\frac{۹}{۵۰}$$

۳۳.گزینه ۲ درست است.



$$\overset{\Delta}{MEN}\sim\overset{\Delta}{FEC}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{MEN}}}{S_{\overset{\Delta}{FEC}}}=(\frac{z}{۴z})^{۲}=\frac{۱}{۱۶}\quad ①$$

$NF\parallel AB$ و نتیجه تالس : $\frac{S_{\overset{\Delta}{FNC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=(\frac{۴z}{۵z})^{۲}=\frac{۱۶}{۲۵}\quad ②$

دو مثلث $\overset{\Delta}{NEC}$ و $\overset{\Delta}{FEC}$ هم‌ارتفاع‌اند: $\frac{S_{\overset{\Delta}{NEC}}}{S_{\overset{\Delta}{FEC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۵}x\times h}{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۶}{۵}x\times h}=\frac{۱}{۴}\quad ③$

$$③\xrightarrow{\text{ترکیب مخرج در صورت}}\frac{S_{\overset{\Delta}{NEC}}+S_{\overset{\Delta}{FEC}}}{S_{\overset{\Delta}{FEC}}}=\frac{۱+۴}{۴}=\frac{۵}{۴}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{FNC}}}{S_{\overset{\Delta}{FEC}}}=\frac{۵}{۴}\rightarrow\boxed{\frac{S_{\overset{\Delta}{FEC}}}{S_{\overset{\Delta}{FNC}}}=\frac{۴}{۵}}\quad ④$$

$$①\text{ و }②\text{ و }④\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{MEN}}}{\cancel{S_{\overset{\Delta}{FEC}}}}\times\frac{\cancel{S_{\overset{\Delta}{FEC}}}}{\cancel{S_{\overset{\Delta}{FNC}}}}\times\frac{\cancel{S_{\overset{\Delta}{FNC}}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۱}{۱۶}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۴}{۱۲۵}\rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{MEN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۴}{۱۲۵}\times۱۰۰\rightarrow\%۳/۲$$

۳۴- گزینه ۲ درست است.

با رسم ارتفاع **MH**:

$$MH^{۲} = HD \times HC$$

$$MH^{۲} = ۹ \times ۴ \rightarrow MH = ۶ = BC \text{ عرض مستطیل}$$

$$x = S_{\overset{\Delta}{MCD}} = \frac{۱۳ \times ۶}{۲} = ۳۹$$

$$y = \textbf{ABCD} \text{ محیط مستطیل} = (۱۳ + ۶) \times ۲ = ۳۸$$

$$x + y = ۳۹ + ۳۸ = ۷۷$$

۳۵-گزینه ۳ درست است.

$$\textbf{MNCB} \text{ محیط ذوزنقه} = ۳ + ۴ + x + y = ۲۱ \rightarrow \boxed{x + y = ۱۴} \quad (۱)$$

با ترکیب

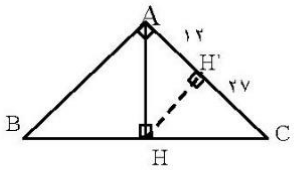
$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{x+۳}{x+۶} = \frac{x}{y} \xrightarrow{\text{صورت در مخرج}} \frac{x+۳}{۲x+۹} = \frac{x}{x+y} \Rightarrow \frac{x+۳}{۲x+۹} = \frac{x}{۱۴} \rightarrow ۲x^{۲} - ۵x - ۴۲ = ۰$$

$$\begin{cases} x = ۶ \rightarrow y = ۸ \Rightarrow \dfrac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{۲} = \left(\dfrac{۶}{۸}\right)^{۲} = \dfrac{۹}{۱۶} \\ x = -\dfrac{۷}{۲} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\overset{\frown}{MNCB}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۷}{۱۶} \rightarrow \%۴۳/۷۵$$

۳۶- گزینه ۴ درست است.

شکل مسئله را ببینید:



$$(HH')^{۲} = AH' \times H'C = ۱۲ \times ۲۷ = ۲^{۲} \times ۳^{۴} \Rightarrow HH' = ۲ \times ۳^{۲} = ۱۸$$

حالا با توجه به موازی بودن AB, HH'، طبق رابطه تالس در مثلث ABC داریم:

$$\frac{CH'}{CA} = \frac{HH'}{AB} \Rightarrow \frac{۲۷}{۲۷ + ۱۲} = \frac{۱۸}{AB} \Rightarrow \frac{۲۷}{۳۹} = \frac{۱۸}{AB} \Rightarrow AB = ۲۶$$

نهایتاً طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$(BC)^{۲} = (AB)^{۲} + (AC)^{۲} = (۲۶)^{۲} + (۳۹)^{۲} = (۲ \times ۱۳)^{۲} + (۳ \times ۱۳)^{۲} = ۴ \times ۱۳^{۲} + ۹ \times ۱۳^{۲} = ۱۳ \times ۱۳^{۲} = ۱۳^{۳}$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{۱۳^{۳}} = ۱۳\sqrt{۱۳}$$

۳۷- گزینه ۳ درست است.

$\overset{\Delta}{ADE}$ رابطه فیثاغورث در: $z^{۲} = ۳^{۲} + ۴^{۲} \rightarrow \boxed{z = ۵}$

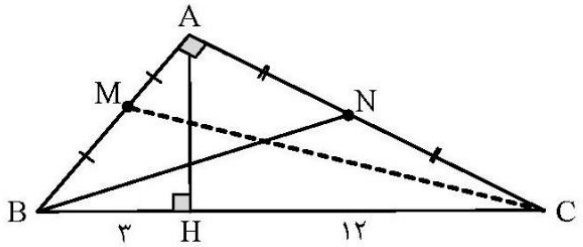
$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \underbrace{\frac{۳}{x+۳} = \frac{۵}{۲۵}}_{\boxed{x=۱۲}} \underbrace{= \frac{۴}{y+۴}}_{\boxed{y=۱۶}}$$

محیط ذوزنقه $DECB = x + z + y + ۲۵ = ۱۲ + ۵ + ۱۶ + ۲۵ = ۵۸$

مساحت ذوزنقه $DECB = S_{\overset{\Delta}{ABC}} - S_{\overset{\Delta}{ADE}} = \frac{۱۵ \times ۲۰}{۲} - \frac{۳ \times ۴}{۲} = ۱۴۴$

اختلاف مقدار عددی مساحت و محیط ذوزنقه $DECB = ۱۴۴ - ۵۸ = ۸۶$

۳۸. گزینه ۲ درست است.



$AH^{۲} = HB.HC \rightarrow AH^{۲} = ۳ \times ۱۲ \rightarrow \boxed{AH = ۶}$

$AB^{۲} = HB.BC \rightarrow AB^{۲} = ۳ \times ۱۵ \rightarrow AB = ۳\sqrt{۵}$

$AC^{۲} = HC.BC \rightarrow AC^{۲} = ۱۲ \times ۱۵ \rightarrow AC = ۶\sqrt{۵}$

$\overset{\Delta}{AMC} : CM^{۲} = AM^{۲} + AC^{۲} \rightarrow CM^{۲} = \left(\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۲} + \left(۶\sqrt{۵}\right)^{۲}$

$\overset{\Delta}{ABN} : BN^{۲} = AN^{۲} + AB^{۲} \rightarrow BN^{۲} = \left(۳\sqrt{۵}\right)^{۲} + \left(۳\sqrt{۵}\right)^{۲}$

$CM^{۲} - BN^{۲} = ۱۰۱/۲۵$

۳۹. گزینه ۱ درست است.

$$FD \parallel AB \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{CF}{AC}=\frac{FD}{AB}=\frac{CD}{BC}=\frac{۱}{۳}$$

$$ED \parallel AC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BE}{AB}=\frac{BD}{BC}=\boxed{\frac{DE}{AC}=\frac{X}{X+۲}} \to \frac{۶}{۹}=\frac{x}{x+۲} \to x=۴$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{CDF}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=(\frac{FD}{AB})^۲=(\frac{۲}{۲+۴})^۲=\frac{۱}{۹} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{CDF}}=\frac{۱}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABC}} \quad (۱)$$

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{EBD}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=(\frac{ED}{AC})^۲=(\frac{۶}{۳+۶})^۲=(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۴}{۹} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{EBD}}=\frac{۴}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABC}} \qquad (۲)$$

$$S_{\square}=S_{\overset{\Delta}{ABC}}-\frac{۱}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABC}}-\frac{۴}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۴}{۹}S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

$$\frac{S_{\square}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow ۴۴/۴۴\%$$

۴۰- گزینه ۳ درست است.

$$S_{\overset{\Delta}{AMN}}=\frac{۱}{۲}\times AM\times AN \to ۶=\frac{۱}{۲}\times AM\times ۴ \to \boxed{AM=۳}$$

فیثاغورث $MN^۲=AM^۲+AN^۲=۳^۲+۴^۲ \to \boxed{MN=۵}$

تعمیم تالس: $\frac{AM}{AC}=\frac{AN}{AB}=\frac{MN}{BC} \to \frac{۳}{۵}=\frac{۴}{۴+NB}=\frac{۵}{BC}$ $\to NB=\frac{۸}{۳}$ ، $\to BC=\frac{۲۵}{۳}$

محیط ذوزنقه MNBC $=MN+NB+BC+CM$

$$=۵+\frac{۸}{۳}+\frac{۲۵}{۳}+۲=۱۸$$

۴۱- گزینه ۲ درست است.

$$BD=۱/۴AD \to AB=AD+BD=AD+۱/۴AD=۲/۴AD \quad (۱)$$

تعمیم قضیه تالس : $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{AD}{۲/۴AD} \Rightarrow \frac{DE}{BC}=\frac{۵}{۱۲}$

طبق (۱)

چون $DE \parallel BC$ و در نتیجه ارتفاع وارد بر قاعده‌های BC و DE در دو مثلث BCE و BDE با هم برابرند:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{BCE}}}{S_{\overset{\Delta}{BDE}}}=\frac{BC}{DE}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

۴۲-گزینه ۳ درست است.

طول ارتفاع نظیر قاعده (AB) برابر با فاصله نقطه C از خط گذرنده از نقاط $A(۰,۲)$ و $B(-۲,۰)$ است که معادله این خط، $y = x + ۲$ است.

حالا برای پیدا کردن مختصات نقطه C به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

از آنجا که مساحت مثلث OBE برابر با یک واحد مربع است، به سادگی نتیجه می‌شود که $|OE| = ۱$ و مختصات E به‌صورت $(۰,-۱)$ است.

نقطه C روی خط گذرنده از نقاط $B(-۲,۰)$ و $E(۰,-۱)$ یعنی خط $y = \frac{-۱}{۲}x - ۱$ است، پس می‌توان آن را به‌صورت $C(\alpha, \frac{-۱}{۲}\alpha - ۱)$ در نظر گرفت.

از آنجا که مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ در رأس C متساوی الساقین است، فاصله نقطه $C(\alpha, \frac{-۱}{۲}\alpha - ۱)$ از نقاط $A(۰,۲)$ و $B(-۲,۰)$ برابر است، یعنی:

$$|BC| = |AC| \Rightarrow \sqrt{(\alpha+۲)^۲ + (\frac{-۱}{۲}\alpha - ۱)^۲} = \sqrt{\alpha^۲ + (\frac{-۱}{۲}\alpha - ۳)^۲} \Rightarrow$$

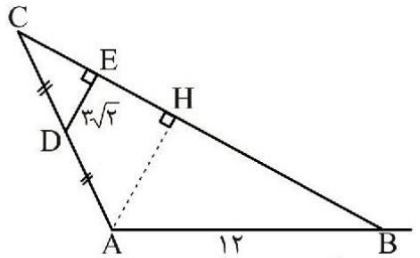
$$(\alpha+۲)^۲ + (\frac{-۱}{۲}\alpha - ۱)^۲ = \alpha^۲ + (\frac{-۱}{۲}\alpha - ۳)^۲ \Rightarrow ۵\alpha + ۵ = ۳\alpha + ۹ \Rightarrow \alpha = ۲ \rightarrow C(۲,-۲)$$

نهایتاً کافی است فاصله نقطه $C(۲,-۲)$ را از خط گذرنده از AB به معادله $y - x - ۲ = ۰$ به‌دست آوریم:

$$\frac{|-۲-۲-۲|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۶}{\sqrt{۲}} = \frac{۶\sqrt{۲}}{۲} = ۳\sqrt{۲}$$

۴۳- گزینه ۲ درست است.

از رأس A بر ضلع BC عمود می‌کنیم و طبق قضیه تالس در مثلث CAH داریم:



$$\begin{cases} CE = EH = x \\ AH = ۶\sqrt{۲} \end{cases}$$

حالا با استفاده از فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه AHB داریم:

$$(HB)^۲ = (AB)^۲ - (AH)^۲ = (۱۲)^۲ - (۶\sqrt{۲})^۲ = ۱۴۴ - ۷۲ = ۷۲ \Rightarrow HB = \sqrt{۷۲} = ۶\sqrt{۲}$$

نهایتاً داریم:

$$BE - CE = (BH + HE) - CE = (۶\sqrt{۲} + x) - x = ۶\sqrt{۲}$$

۴۴- گزینه ۴ درست است.

مثلث‌های OAH' و OBH به حالت دو زاویه برابر (زوایای قائمه و زوایای متقابل به رأس) در شکلِ پروانه‌ای متشابه‌اند.

از طرفی مثلث‌های OAH' و AHC نیز به حالت دو زاویه (زوایای قائمه و یک زاویه مشترک) متشابه‌اند.

پس مثلث‌های OBH و AHC نیز متشابه بوده و طبق اضلاع متناسب، اضلاع یکی، k برابر اضلاع دیگری است.

پس اگر برای مثال اضلاع مثلث OBH را داده‌های آماری با میانگین $\overline{x}$، انحراف معیار σ و ضریب تغییرات $CV = \frac{\sigma}{\overline{x}}$ در نظر بگیریم، اضلاع مثلث AHC، k برابر همین داده‌های آماری بوده و ضریب تغییرات آن‌ها برابر است با:

$$CV_۲ = \frac{k\sigma}{k\overline{x}} = \frac{\sigma}{\overline{x}} = CV_۱$$

پس نسبت ضرایب تغییرات برابر با یک است.

www.mapedu.ir

تست و پاسخ ۱

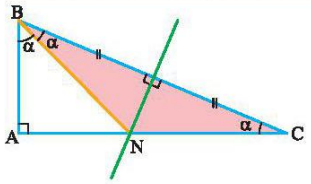
در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، نیمساز زاویهٔ B و عمودمنصف وتر در نقطهٔ N روی ضلع AC متقاطع‌اند. تفاضل دو زاویهٔ حادهٔ این مثلث چند درجه است؟

۱) صفر　　۲) ۲۲/۵　　۳) ۱۵　　۴) ۳۰

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره بعد رسم شکل، دنبال یک مثلث متساوی‌الساقین باشید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** شکل می‌کشیم:



گام دوم: هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است؛ پس N از B و C به یک فاصله است: $BN = CN$

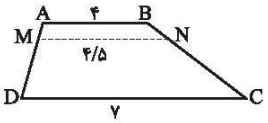
در نتیجه مثلث NBC متساوی‌الساقین است و زاویهٔ C هم برابر با α می‌شود.

گام سوم: مجموع زوایای B و C، ۹۰ درجه است: $۲\alpha + \alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$

گام چهارم: تفاضل زوایای B و C برابر است با: $\hat{B} - \hat{C} = ۲\alpha - \alpha = \alpha = ۳۰^\circ$

تست و پاسخ ۲

در ذوزنقهٔ مقابل، پاره‌خط MN به طول ۴/۵ موازی قاعده‌ها است. نسبت MD به MA کدام است؟



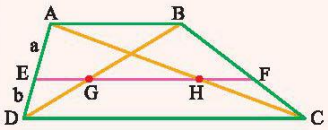
۱) ۳　　۲) ۴

۳) ۵　　۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳

درس‌نامه تالس در ذوزنقه

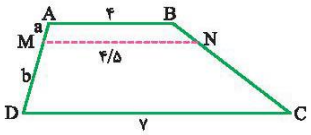
خط EF موازی دو قاعده رسم شده است. دو رابطهٔ زیر را داریم:



$$(۱)\ EF = \frac{(a \times DC) + (b \times AB)}{a + b}$$

$$(۲)\ GH = \frac{(a \times DC) - (b \times AB)}{a + b}$$

پاسخ تشریحی با توجه به رابطهٔ (۱) درس‌نامه، داریم:

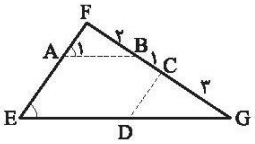


$$MN = \frac{(a \times DC) + (b \times AB)}{a + b} \Rightarrow ۴/۵ = \frac{۷a + ۴b}{a + b} \Rightarrow ۷a + ۴b = ۴/۵a + ۴/۵b$$

$$\Rightarrow ۲/۵a = ۰/۵b \xrightarrow{\times ۲} ۵a = b \Rightarrow \frac{b}{a} = ۵ \Rightarrow \frac{MD}{MA} = ۵$$

تست و پاسخ ۳

در شکل زیر اگر $\hat{A}_۱ = \hat{E}$ و $CD \parallel AE$ باشد، مساحت پنج‌ضلعی چند برابر مثلث بزرگ‌تر است؟



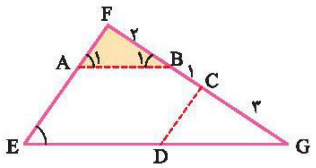
۱) $\frac{۵۳}{۷۲}$　　۲) $\frac{۴۱}{۵۴}$

۳) $\frac{۵۵}{۷۲}$　　۴) $\frac{۲۳}{۳۶}$

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره دو مثلث AFB و CDG با مثلث بزرگ متشابه‌اند. نسبت مساحت‌ها $k^۲$ می‌شد.

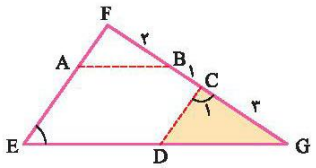
پاسخ تشریحی **گام اول:** مثلث‌های AFB و EFG به حالت تساوی ۲ زاویه متشابه‌اند ($\hat{F}=\hat{F}$ و $\hat{A}_۱=\hat{E}$). نسبت تشابه دو مثلث برابر است با: $k=\frac{FB}{FG}=\frac{۲}{۲+۱+۳}=\frac{۱}{۳}$



پس نسبت مساحت‌هایشان $(\frac{۱}{۳})^۲$ یعنی $\frac{۱}{۹}$ است.

اگر مساحت مثلث بزرگ را S بگیریم، مساحت مثلث AFB می‌شود $\frac{۱}{۹}S$.

گام دوم: مثلث‌های CDG و EFG به حالت تساوی ۲ زاویه متشابه‌اند ($\hat{G}=\hat{G}$ و $\hat{F}=\hat{C}_۱$).



نسبت تشابه دو مثلث برابر است با: $k=\frac{CG}{FG}=\frac{۳}{۲+۱+۳}=\frac{۱}{۲}$

پس نسبت مساحت‌هایشان $(\frac{۱}{۲})^۲$ یعنی $\frac{۱}{۴}$ است.

مساحت مثلث بزرگ را S گرفته بودیم، پس مساحت $\overset{\Delta}{CDG}$ می‌شود $\frac{۱}{۴}S$.

گام سوم: مساحت پنج‌ضلعی را حساب می‌کنیم:

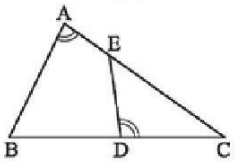
$$S_{\text{پنج‌ضلعی}}=S_{\text{کل}}-S_{\overset{\Delta}{AFB}}-S_{\overset{\Delta}{CDG}}=S-\frac{۱}{۹}S-\frac{۱}{۴}S=\frac{۲۳}{۳۶}S$$

گام چهارم: نسبت مساحت پنج‌ضلعی به مساحت مثلث بزرگ برابر است با:

$$\frac{\frac{۲۳}{۳۶}S}{S}=\frac{۲۳}{۳۶}$$

تست و پاسخ ۴

مطابق شکل اگر $\hat{A}=\widehat{CDE}$ ، $CD=۱/۲\,BD$ و بدانیم مساحت چهارضلعی ABDE، ۸۴ درصد مساحت کل شکل است، حاصل $\frac{AE}{CE}$ به کدام عدد نزدیک‌تر است؟

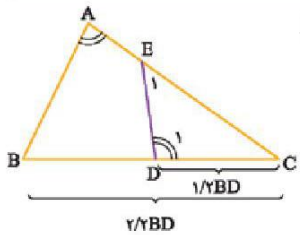


۱) ۲/۳
۲) ۲/۴
۳) ۲/۵
۴) ۲/۶

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره دو مثلث متشابه‌اند.

پاسخ تشریحی **گام اول:** دو مثلث ABC و DEC به حالت تساوی دو زاویه، متشابه‌اند ($\hat{A}=\hat{D}_۱$ ، $\hat{C}=\hat{C}$).



گام دوم: مساحت چهارضلعی AEDB، ۸۴ درصد مساحت کل است، پس مساحت مثلث ECD هم ۱۶ درصد مساحت کل است؛ یعنی نسبت مساحت مثلث ECD به مساحت مثلث ABC می‌شود $\frac{۱۶}{۱۰۰}$.

چون دو مثلث متشابه‌اند، پس نسبت اضلاع نظیرشان می‌شود $\sqrt{\frac{۱۶}{۱۰۰}}=\frac{۲}{۵}$.

گام سوم: تناسب بین اضلاعشان را می‌نویسیم. هر ۳ کسر باید $\frac{۲}{۵}$ باشند.

بی‌خیال می‌شیم!

$$\frac{DE}{AB}=\frac{CE}{BC}=\frac{CD}{AC}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\frac{CE}{۲/۲\,BD}=\frac{۱/۲\,BD}{AC}=\frac{۲}{۵}$$

روبه‌رو به زاویهٔ C — روبه‌رو به $D_۱$ و A — روبه‌رو به $E_۱$ و B

گام چهارم: CE و AC را برحسب BD می‌نویسیم:

$$\frac{CE}{۲/۲\,BD}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow CE=\frac{۴/۴}{۵}BD\Rightarrow CE=۰/۸۸\,BD$$

$$\frac{\overset{۰/۶}{\cancel{۱/۲}}\,BD}{AC}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۲}}}{۵}\Rightarrow AC=۳\,BD$$

گام پنجم: با توجه به شکل $AE=AC-EC$، پس:

$$AE=۳\,BD-۰/۸۸\,BD=۲/۱۲\,BD$$

در نتیجه:

$$\frac{AE}{CE}=\frac{۲/۱۲\,BD}{۰/۸۸\,BD}=\frac{۲۱۲}{۸۸}=\frac{۵۳}{۲۲}\simeq ۲/۴$$

تست و پاسخ ۵

قاعده‌های یک ذوزنقه بر دو خط با شیب‌های منفی به معادله‌های $ay-x=۱$ و $y=۲ax+۱$ واقع‌اند. اگر مساحت این ذوزنقه $\sqrt{۹+۶\sqrt{۲}}$ باشد، مجموع طول قاعده‌های آن کدام است؟

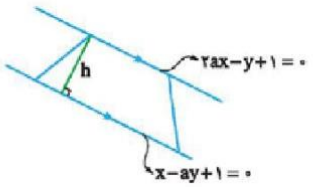
۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی **گام اول:** عدد مساحت را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$S=\sqrt{\underbrace{۹+۶\sqrt{۲}}_{\text{فاکتور از ۳}}}=\sqrt{۳(\underbrace{۳+۲\sqrt{۲}}_{\text{اتحاد مربع}})}=\sqrt{۳(\sqrt{۲}+۱)^۲}=\sqrt{۳}(\sqrt{۲}+۱)$$

گام دوم: برای مسئله یک شکل تقریبی می‌کشیم:



دو قاعده با هم موازی‌اند، پس شیب خط‌ها باید برابر باشد:

$$\left.\begin{array}{l} y=۲ax+۱\Rightarrow m_۱=۲a \\ ay=x+۱\Rightarrow y=\frac{۱}{a}x+\frac{۱}{a}\Rightarrow m_۲=\frac{۱}{a}\end{array}\right\}\xrightarrow{m_۱=m_۲}۲a=\frac{۱}{a}\Rightarrow a^۲=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{شیب‌ها منفی}}a=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$$

گام سوم: معادلهٔ دو قاعده را می‌نویسیم:

$$۲ax-y+۱=۰\xrightarrow{a=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}}-\sqrt{۲}x-y+۱=۰$$

$$x-ay+۱=۰\xrightarrow{a=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}}x+\frac{۱}{\sqrt{۲}}y+۱=۰\xrightarrow{\times(-\sqrt{۲})}-\sqrt{۲}x-y-\sqrt{۲}=۰$$

فاصلهٔ دو خط موازی، ارتفاع ذوزنقه را می‌دهد:

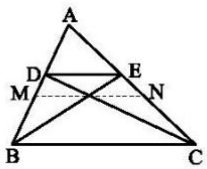
$$\text{ارتفاع}=\frac{|C-C'|}{\sqrt{A^۲+B^۲}}=\frac{|۱-(-\sqrt{۲})|}{\sqrt{(-\sqrt{۲})^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۱+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$$

گام چهارم: با داشتن ارتفاع و مساحت، مجموع طول دو قاعده را پیدا می‌کنیم:

$$S=\frac{\overbrace{\text{مجموع دو قاعده}}^{k}\times\text{ارتفاع}}{۲}\Rightarrow\sqrt{۳}(\cancel{\sqrt{۲}+۱})=\frac{\frac{\cancel{۱+\sqrt{۲}}}{\sqrt{۳}}\times k}{۲}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{k}{۲\sqrt{۳}}\Rightarrow k=۶$$

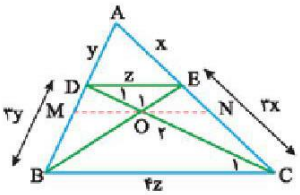
تست و پاسخ ۶

مطابق شکل $DE \parallel MN \parallel BC$. اگر $\frac{AE}{EC}=\frac{۱}{۳}$، آن‌گاه حاصل $\frac{MN}{DE}$ کدام است؟



۱) ۱/۵ ۲) ۱/۶ ۳) ۱/۷ ۴) ۱/۸

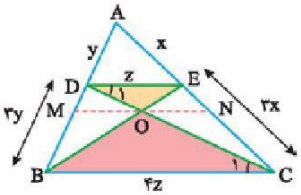
پاسخ: گزینه ۲



پاسخ تشریحی **گام اول:** با توجه به تساوی $\frac{AE}{EC}=\frac{۱}{۳}$ و موازی‌بودن DE و BC، نسبت بعضی پاره‌خط‌ها را روی شکل می‌نویسیم:

گام دوم: دو مثلث DEO و OCB به حالت تساوی ۲ زاویه، متشابه‌اند ($O_۱$ و $O_۲$ متقابل‌به‌رأس‌اند و $D_۱$ و $C_۱$ با توجه به موازی و مورب، برابرند).

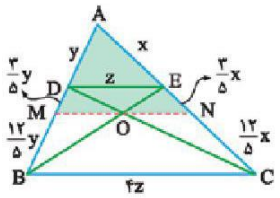
چون نسبت دو ضلع متناظرشان ۴ است، پس نسبت‌های $\frac{NC}{EN}$ و $\frac{MB}{DM}$ نیز ۴ است:



$$\frac{NC}{EN}=۴ \Rightarrow \begin{cases} NC=۴k \\ EN=k \end{cases}$$

$$NC+EN=۳x \Rightarrow ۴k+k=۳x \Rightarrow k=\frac{۳}{۵}x \Rightarrow \begin{cases} NC=\frac{۱۲}{۵}x \\ EN=\frac{۳}{۵}x \end{cases}$$

گام سوم: اندازه‌های جدید را روی شکل وارد می‌کنیم:

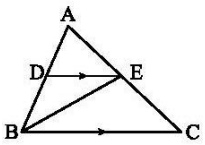


گام چهارم: در مثلث AMN با توجه به موازی‌بودن DE و MN، تالس جزءبه‌کل می‌نویسیم:

$$\frac{AE}{AN}=\frac{DE}{MN} \Rightarrow \frac{x}{x+\frac{۳}{۵}x}=\frac{DE}{MN} \Rightarrow \frac{x}{\frac{۸}{۵}x}=\frac{DE}{MN} \Rightarrow \frac{۵}{۸}=\frac{DE}{MN} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۸}{۵}=\frac{MN}{DE} \Rightarrow \frac{MN}{DE}=۱/۶$$

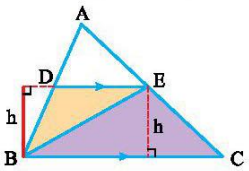
تست و پاسخ ۷

در شکل رسم‌شده، نسبت مساحت مثلث BDE به مساحت مثلث BCE برابر با ۰/۶ است. مساحت ذوزنقهٔ موجود در شکل، چند برابر مساحت بزرگ‌ترین مثلث است؟



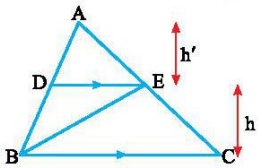
۱) ۰/۶
۲) ۰/۶۴
۳) ۰/۷۵
۴) ۰/۸۱

پاسخ تشریحی **گام اول:** دو مثلث BDE و BCE، ارتفاع‌های یکسانی دارند (به شرطی که قاعده‌ها را DE و BC بگیریم)، نسبت مساحتشان هم ۰/۶ است، پس:



$$\frac{S_{BDE}}{S_{BCE}}=\frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \frac{\frac{h\times DE}{۲}}{\frac{h\times BC}{۲}}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{DE}{BC}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \begin{cases} DE=۳x \\ BC=۵x \end{cases}$$

گام دوم: در مثلث ABC، تالس جزءبه‌کل می‌نویسیم:



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC}=\frac{h'}{h'+h} \Rightarrow \frac{۳}{۵}=\frac{h'}{h'+h}$$

$$\Rightarrow ۵h'=۳h'+۳h \Rightarrow ۲h'=۳h \Rightarrow h'=\frac{۳}{۲}h$$

گام سوم: نسبت مساحت ذوزنقهٔ DECB به مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\frac{S_{DECB}}{S_{ABC}}= \Rightarrow \frac{\frac{(DE+BC)\times h}{۲}}{\frac{(h'+h)BC}{۲}}=\frac{(۳x+۵x)\times h}{(\frac{۳}{۲}h+h)\times ۵x}=\frac{۸\times h}{\frac{۲۵}{۲}\times h}=\frac{\frac{۸}{۱}}{\frac{۲۵}{۲}}=\frac{۱۶}{۲۵}=\frac{۱۶\times ۴}{۲۵\times ۴}=۰/۶۴$$

تست و پاسخ ۸

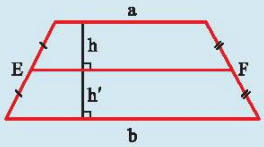
با رسم پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه‌ای را به هم وصل می‌کند، مساحت آن ذوزنقه به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌شود. طول این پاره‌خط چند برابر قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۷

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره تالس در ذوزنقه بارها در سؤالات کنکور دیده شده است. این مدل هم قبلاً در کنکور آمده است.

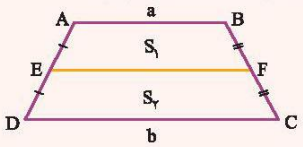
خودت حل کنی بهتره اگر وسط دو ساق ذوزنقه را به هم وصل کنیم، دوتا اتفاق می‌افتد:



۱) $EF = \frac{a+b}{۲}$

۲) $h = h'$

درس‌نامه در ذوزنقه، اگر وسط‌های دو ساق را به هم وصل کنیم، پاره‌خط به وجود آمده موازی دو قاعده است و داریم:



۱) EF میانگین دو قاعده است: $EF = \frac{a+b}{۲}$

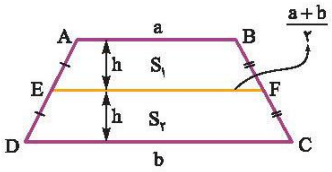
۲) نسبت مساحت ذوزنقهٔ بالایی به پایینی برابر است با: $\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۳a+b}{a+۳b}$

پاسخ تشریحی **راه اول:** از نکتهٔ (۲) استفاده می‌کنیم. نسبت $S_۱$ به $S_۲$ باید $\frac{۱}{۲}$ باشد: $\frac{۳a+b}{a+۳b} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۶a+۲b = a+۳b \Rightarrow ۵a = b$

حالا نسبت EF به قاعدهٔ بزرگ یعنی b را حساب می‌کنیم:

$$\frac{EF}{CD} = \frac{\frac{a+b}{۲}}{b} = \frac{a+b}{۲b} \xrightarrow{b=۵a} \frac{a+۵a}{۲(۵a)} = \frac{۶a}{۱۰a} = ۰/۶$$

راه دوم: خیلی‌ها نکتهٔ (۲) را بلد نیستند ولی نکتهٔ (۱) را بلدند. به کمک نکتهٔ (۱) سؤال را حل می‌کنیم.



اندازه‌ها را روی شکل می‌نویسیم:

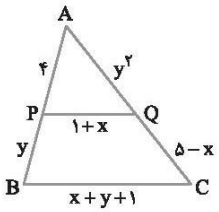
چون EF وسط دو قاعده است، پس فاصلهٔ خطوط از هم یکسان است (هر دو را h گرفتیم). نسبت $S_۱$ به $S_۲$، برابر با $\frac{۱}{۲}$ است:

$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\frac{(a+\frac{a+b}{۲})\times \cancel{h}}{\cancel{۲}}}{\frac{(\frac{a+b}{۲}+b)\times \cancel{h}}{\cancel{۲}}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\frac{۲a+a+b}{\cancel{۲}}}{\frac{a+b+۲b}{\cancel{۲}}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۳a+b}{a+۳b} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$ مشابه روش اول!

خاطره مساحت ذوزنقه از رابطهٔ روبه‌رو حساب می‌شد: $\frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{۲}$

تست و پاسخ ۹

در شکل روبه‌رو اگر PQ || BC ، آن‌گاه نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر کدام است؟



۱) ۱/۵

۲) ۲

۳) ۲/۲۵

۴) ۴

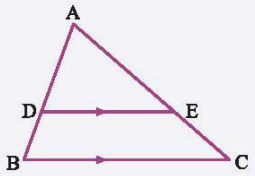
رشته تجربی

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره **باید بدانید چه زمانی بهتر است از تالس جزءبه‌جزء و چه زمانی باید از تالس جزءبه‌کل استفاده کنیم. تالس‌بودن این سؤال خیلی واضح است، فقط در محاسبات جبری‌اش دقت کنید.**

خودت حل‌کنی بهتره اگر نسبت تشابه دو شکل متشابه k باشد، نسبت مساحت آن‌ها k^2 است.

نکته اگر در مثلث ABC، خط DE موازی BC، دو ضلع دیگر را قطع کند، روابط زیر را داریم:



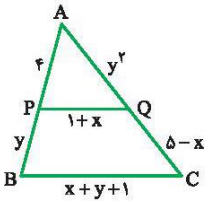
۱) تالس جزءبه‌جزء: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

۲) تالس جزءبه‌کل: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

۳) نسبت مساحت مثلث ADE به مساحت مثلث ABC با مربع نسبت‌های نکتهٔ ۲ برابر است:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=(\frac{AD}{AB})^2=(\frac{AE}{AC})^2=(\frac{DE}{BC})^2$$

پاسخ تشریحی در شکل روبه‌رو اول برای اضلاع سمت چپ و دو ضلع افقی، تالس جزءبه‌کل می‌نویسیم:



$$\frac{AP}{AB}=\frac{PQ}{BC}\Rightarrow\frac{4}{4+y}=\frac{(1+x)}{(1+x)+y}\xrightarrow[\text{باشد ۴}]{\text{باید ۱+x}}1+x=4\Rightarrow x=3$$

حالا برای اضلاع کناری، تالس جزءبه‌جزء می‌نویسیم:

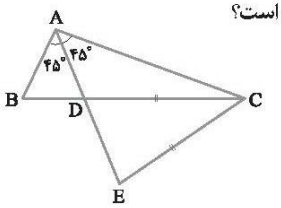
$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}\Rightarrow\frac{4}{y}=\frac{y^2}{5-x}\xrightarrow{x=3}\frac{4}{y}=\frac{y^2}{2}\Rightarrow y^3=8\Rightarrow y=2$$

طبق نکتهٔ (۳)، نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{APQ}}}=(\frac{x+y+1}{1+x})^2=(\frac{3+2+1}{3+1})^2=(\frac{3}{2})^2=2/25$$

تست و پاسخ ۱۰

در شکل زیر اگر $BC=2AB=2$ و $CD=CE$ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ E از AC چند برابر فاصلهٔ D از AB است؟



۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲

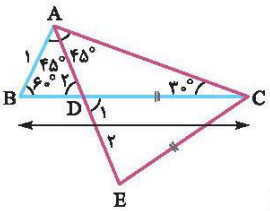
۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره **در سؤالات هندسه که دنبال نسبت هستیم، نیم‌نگاهی به تشابه داشته باشید. سؤال‌های این مدلی در کنکور زیاد آمده است!**

خودت حل‌کنی بهتره نسبت ارتفاع‌های نظیر در دو مثلث متشابه، با نسبت اضلاعشان برابر است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** مثلث ABC، قائم‌الزاویه است و اندازهٔ دو ضلعش را داریم.

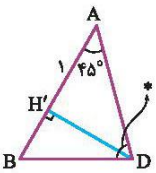


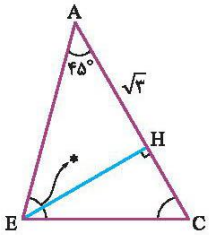
اندازهٔ AC را با فیثاغورس حساب می‌کنیم: $AC=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

گام دوم: مثلث DCE متساوی‌الساقین است، پس: $\hat{D}_1=\hat{E}$

از طرفی چون $\hat{D}_1$ و $\hat{D}_2$ متقابل به رأس‌اند، پس برابرند و در نتیجه: $\hat{D}_2=\hat{E}$

گام سوم: دو مثلث AEC و ABD متشابه‌اند:





$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ \hat{D}_2=\hat{E}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{زز}}\overset{\Delta}{ADB}\sim\overset{\Delta}{ACE}$$

گام چهارم: اضلاع AC و AB که روبه‌روی زوایای برابر E و D هستند، متناظرند؛ یعنی نسبتشان همان نسبت تشابه است:

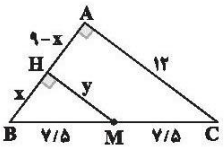
$$\text{نسبت تشابه} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{۳}}{۱} = \sqrt{۳}$$

گام پنجم: فاصلهٔ E از AC و فاصلهٔ D از AB، به ترتیب ارتفاع‌های نظیر دو مثلث هستند که نسبتشان همان $\sqrt{۳}$ می‌شود: $\frac{EH}{DH'} = \sqrt{۳}$

آزمون‌های سراسری گاج

www.mapedu.ir

1 (۱) نقطهٔ M محل برخورد عمودمنصف‌هاست. این نقطه دقیقاً وسط ضلع BC خواهد بود.



طبق رابطهٔ فیثاغورس BC=۱۵ خواهد شد. از M عمود MH را بر ضلع AB فرود می‌آوریم. طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{y}{۱۲}=\frac{۷/۵}{۱۵}\Rightarrow y=۶$$

2 (۲) نقطهٔ M روی نیم‌ساز زاویهٔ yOz قرار دارد در نتیجه فاصلهٔ M از Oy و Oz یکسان است.

$$۲y-۱=y+۱\Rightarrow y=۲$$

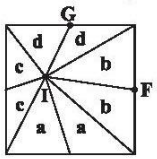
دو مثلث OAM و OBM به حالت وتر و یک ضلع قائم با هم همنهشت‌اند

در نتیجه: $۶-۲x=x+۳\Rightarrow x=۱$

$$S_{OMB}=S_{OMA}=\frac{۱}{۲}\times BM\times OB=\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۴=۶$$

$$S_{OAMB}=۲\times ۶=۱۲$$

3 (۴) می‌دانیم نسبت مساحت‌های مثلث‌های هم ارتفاع برابر نسبت قاعده‌های آن است. بدیهی است که اگر هم ارتفاع و هم قاعده‌ها با هم برابر باشند مساحت‌ها برابر خواهند بود. برای حل این سؤال از نقطهٔ I به رئوس مربع وصل می‌کنیم و مساحت‌های یکسان را مشخص می‌کنیم.



با توجه به داده‌های مسئله:

$$\left.\begin{array}{l} a+c=۱۶\\ a+b=۲۰\\ b+d=۱۸\\ c+d=x\end{array}\right\}\xrightarrow{+}۲(a+b+c+d)=۵۴+x$$

$$\Rightarrow ۲(۱۶+۱۸)=۵۴+x\Rightarrow ۲\times ۳۴-۵۴=x$$

$$\Rightarrow x=۶۸-۵۴=۱۴$$

البته این نکته را هم داشته باشید:

$$۲۰+x=۱۸+۱۶\Rightarrow x=۱۴$$

4 (۱)

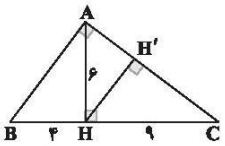
$$\Delta CEF:\frac{۲}{۲+x}=\frac{y}{y+۶}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\begin{cases}x+۲=۶\Rightarrow x=۴\\ y+۶=۳y\Rightarrow y=۳\end{cases}$$

$$\Delta ABC\sim\Delta CDG\Rightarrow\frac{AB}{DG}=\frac{AC}{CG}=\frac{BC}{DC}$$

$$\Rightarrow\frac{۸}{۴}=\frac{AC}{۳}=\frac{BC}{۲}\Rightarrow\begin{cases}AC=۶\\ BC=۴\end{cases}$$

محیط مثلث ABC $=۶+۴+۸=۱۸$

5 (۴) ارتفاع وارد بر وتر، واسطهٔ هندسی دو پاره‌خط ایجاد شده بر وتر است.



$$AH^۲=BH\times HC=۴\times ۹\Rightarrow AH=۶$$

$$AC^۲=۶^۲+۹^۲=۳۶+۸۱=۱۱۷$$

$$\Rightarrow AC=\sqrt{۱۱۷}$$

$$\Delta AHC:HH'\times AC=AH\times HC\Rightarrow HH'=\frac{۵۴}{\sqrt{۱۱۷}}$$

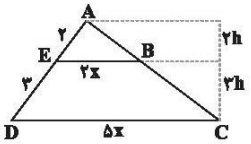
6 (۴) اگر دو عدد مثبت را a و b در نظر بگیریم:

$$a^۲+b^۲=۶ab\xrightarrow{+b^۲}\frac{a^۲}{b^۲}+۱=\frac{۶a}{b}$$

با فرض $\frac{a}{b}=x$ داریم: $x^۲-۶x+۱=۰\Rightarrow x=۳\pm۲\sqrt{۲}$

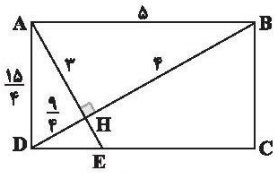
در واقع نسبت آن دو عدد $۳+۲\sqrt{۲}$ یا $۳-۲\sqrt{۲}$ خواهد بود.

7 - ۳ با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس ابعاد شکل را نام‌گذاری می‌کنیم.



$$\frac{S_{EBCD}}{S_{AEB}}=\frac{\frac{۱}{۲}(۲x+۵x)\times ۳h}{\frac{۱}{۲}\times ۲x\times ۲h}=\frac{۲۱}{۴}=۵/۲۵$$

8 (۱)



$$\Delta AHB:AB^۲=AH^۲+HB^۲\Rightarrow ۲۵=۱۶+AH^۲\Rightarrow AH=۳$$

$$\Delta ADB:AH^۲=DH\times HB\Rightarrow ۹=DH\times ۴\Rightarrow DH=\frac{۹}{۴}$$

$$\Delta ADH:AD^۲=AH^۲+DH^۲=۹+\frac{۸۱}{۱۶}=\frac{۹\times ۱۶+۸۱}{۱۶}=\frac{۹(۱۶+۹)}{۱۶}$$

$$=\frac{۹\times ۲۵}{۱۶}\Rightarrow AD=\frac{۳\times ۵}{۴}=\frac{۱۵}{۴}$$

$$\begin{cases}D\hat{A}E=D\hat{B}A\\ \hat{D}=\hat{A}\end{cases}\Rightarrow\Delta ADE\sim\Delta ADB$$

$$\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{DB}\Rightarrow AE=\frac{\frac{۱۵}{۴}\times(۴+\frac{۹}{۴})}{۵}=\frac{\frac{۱۵}{۴}\times\frac{۲۵}{۴}}{۵}$$

$$\Rightarrow AE=\frac{۷۵}{۱۶}\Rightarrow HE=\frac{۷۵}{۱۶}-۳=\frac{۷۵-۴۸}{۱۶}=\frac{۲۷}{۱۶}$$

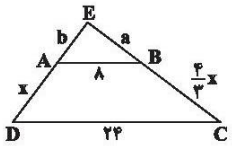
9 (۲) اگر دو مثلث متشابه باشند آن‌گاه نسبت مساحت‌ها برابر مربع نسبت اضلاع آن دو مثلث است.

$$\frac{S}{S'}=\frac{AB}{A'B'}+۶ \xrightarrow{\frac{S}{S'}=(\frac{AB}{A'B'})^۲} (\frac{AB}{A'B'})^۲=\frac{AB}{A'B'}+۶$$

$$\xrightarrow{\frac{AB}{A'B'}=x} x+۶=x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲-x-۶=۰ \xrightarrow{x>۰} x=۳ \Rightarrow x^۲=۹$$

10 (۲)



$$\Delta EDC: \frac{a}{b}=\frac{\frac{۴}{۳}x}{x}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow b=\frac{۳}{۴}a$$

$$\Delta EAB: a+b+۸=۱۵ \Rightarrow a+\frac{۳}{۴}a=۷$$

$$\Rightarrow \frac{۷}{۴}a=۷ \Rightarrow a=۴ , b=۳$$

$$\Delta EDC: \frac{AE}{ED}=\frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{b}{b+x}=\frac{۸}{۲۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۳+x}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۳+x=۹ \Rightarrow x=۶$$

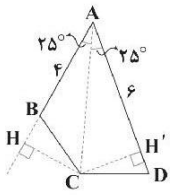
محیط ذوزنقه $=۸+۶+۸+۲۴=۴۶$

11 (۲) چون $d \| BC$ است پس فاصلهٔ A از پاره‌خط BC همواره ثابت است. این فاصله همان ارتفاع مثلث ABC می‌باشد.

$S(\Delta ABC)=\frac{۱}{۲}AH\times BC=$ مقدار ثابت

12 (۱) هر نقطه واقع بر نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است، پس: $CH=CH'$

از طرفی برای مساحت دو مثلث ACD و ABC داریم:

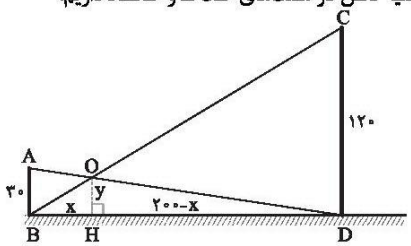


$$S_{\overset{\Delta}{ADC}}=\frac{۱}{۲}CH'\times AD \Rightarrow ۴۸=\frac{۱}{۲}\times CH'\times ۶$$

$$\Rightarrow CH'=۱۶ \Rightarrow CH=۱۶$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}CH\times AB=\frac{۱}{۲}\times ۱۶\times ۴=۳۲$$

13 (۴) طبق قضیهٔ تالس در مثلث‌های BCD و ABD داریم:



$$\overset{\Delta}{ABD}: OH \| AB \Rightarrow \frac{OH}{AB}=\frac{DH}{DB} \Rightarrow \frac{y}{۳۰}=\frac{۲۰۰-x}{۲۰۰}$$

$$\Rightarrow y=\frac{۳(۲۰۰-x)}{۲۰} \quad (۱)$$

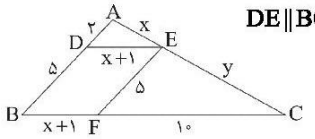
$$\overset{\Delta}{BCD}: OH \| DC \Rightarrow \frac{OH}{DC}=\frac{BH}{BD} \Rightarrow \frac{y}{۱۲۰}=\frac{x}{۲۰۰}$$

$$\Rightarrow y=\frac{۱۲۰x}{۲۰۰}=\frac{۳x}{۵} \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \rightarrow \frac{\cancel{۳}(۲۰۰-x)}{۲۰}=\frac{\cancel{۳}x}{۵} \Rightarrow ۱۰۰۰-۵x=۲۰x \Rightarrow ۱۰۰۰=۲۵x$$

$$\Rightarrow x=۴۰ \xrightarrow{\text{در } (۲)} y=\frac{۳\times ۴۰}{۵}=۲۴$$

14 (۲) در متوازی‌الاضلاع، اضلاع روبه‌رو موازی و مساوی هستند، پس:



$$DE \| BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۷}=\frac{x+۱}{(x+۱)+۱۰}$$

$$\Rightarrow ۲x+۲۲=۷x+۷ \Rightarrow ۵x=۱۵ \Rightarrow x=۳$$

هم‌چنین طبق تالس داریم:

$$DE \| BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{۲}{۵}=\frac{x}{y} \xrightarrow{x=۳} ۲y=۱۵ \Rightarrow y=۷/۵$$

$$x+y=۳+۷/۵=۱۰/۵$$

15 (۲) الف) مثال نقض دارد، عدد ۲ اول است.

ب) مثال نقض ندارد.

ج) مثال نقض دارد. به ازای $n=۱$ عبارت $n^۲+n+۳۷$ برابر ۳۹ و مضرب ۳ است.

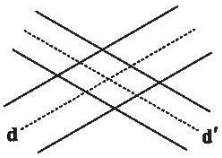
د) مثال نقض ندارد.

16 (۴)

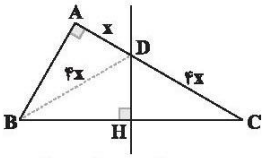
$$\frac{a}{b}=۲ \Rightarrow a=۲b$$

$$۴a^۲+۴ab+b^۲=(۲a+b)^۲=(۴b+b)^۲=۲۵b^۲$$

۱۷ **۱** مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ باشند دو خط موازی با آن به فاصله ۳ خواهد بود و مکان هندسی نقاطی که از خط d' به فاصله ۲ باشند، دو خط موازی با آن به فاصله ۲ خواهد بود. این چهار خط در ۴ نقطه یک‌دیگر را قطع می‌کنند.



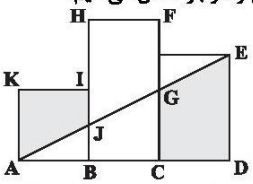
۱۸ **۲** D روی عمودمنصف قرار دارد پس $DB=DC$ است. در مثلث قائم‌الزاویه ABD داریم:



$$AB^{۲}+x^{۲}=۱۶x^{۲}\Rightarrow AB=x\sqrt{۱۵}$$

$$\frac{CD}{AB}=\frac{۴x}{x\sqrt{۱۵}}=\frac{۴}{\sqrt{۱۵}}$$

۱۹ **۲** در مثلث AED قضیهٔ تالس را دو بار اعمال می‌کنیم:



$$\frac{AB}{AD}=\frac{JB}{DE}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{JB}{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow JB=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{AC}{AD}=\frac{GC}{ED}\Rightarrow\frac{۲}{۳}=\frac{CG}{\frac{۳}{۲}}\Rightarrow CG=۱$$

$$\frac{S_{GCDE}}{S_{AJIK}}=\frac{\frac{۱}{۲}(CG+DE)\times CD}{\frac{۱}{۲}(IJ+KA)\times AB}=\frac{۱+\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}+۱}=\frac{\frac{۵}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۵}{۳}$$

۲۰ **۳**

$$\Delta AEB:\frac{FG}{AB}=\frac{EF}{AE}\Rightarrow\frac{AE}{EF}=\frac{a}{FG}$$

$$\Delta AED:\frac{FH}{ED}=\frac{AF}{AE}\Rightarrow\frac{۲FG}{۴a}=\frac{AF}{AE}$$

طرفین رابطهٔ بالا را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\frac{a}{FG}\times\frac{۲FG}{۴a}=\frac{AE}{EF}\times\frac{AF}{AE}\Rightarrow\frac{AF}{EF}=\frac{۱}{۲}$$

۲۱ **۱** دو مثلث ABD و BCE با هم متشابهند. بنابراین:

$$\frac{EC}{AD}=\frac{BC}{BA}\Rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{BC}{BA}\Rightarrow\frac{BC}{BC+BA}=\frac{۳}{۳+۲}$$

$$\Rightarrow\frac{BC}{AC}=\frac{۳}{۵}$$

۲۲ **۳**

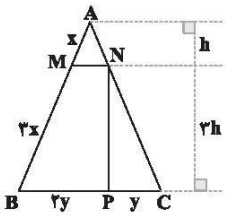
$$\Delta BDC:BD=\sqrt{۱۶+۳۶}=\sqrt{۵۲}$$

$$AH\times BD=۴\times۶\Rightarrow AH=\frac{۲۴}{\sqrt{۵۲}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\Delta AHB:HB=\sqrt{۶^{۲}-(\frac{۱۲}{\sqrt{۱۳}})^{۲}}=\sqrt{۳۶-\frac{۱۴۴}{۱۳}}=\sqrt{\frac{۳۲۴}{۱۳}}=\frac{۱۸}{\sqrt{۱۳}}$$

$$HH'\times AB=AH\times HB\Rightarrow HH'=\frac{\frac{۱۲}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۱۸}{\sqrt{۱۳}}}{۶}=\frac{۳۶}{۱۳}$$

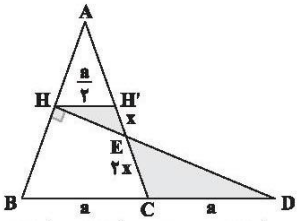
۲۳ **۴**



$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow\frac{۱}{۴}=\frac{MN}{۳y}\Rightarrow MN=\frac{۳}{۴}y$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNPB}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times۴h\times۳y}{\frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۴}y+۲y)\times۳h}=\frac{۴}{\frac{۳}{۴}+۲}=\frac{۴}{\frac{۱۱}{۴}}=\frac{۱۶}{۱۱}$$

۲۴ **۴** مثلث‌های EHH' و ECD متشابهند پس $CD=۲HH'$ است. در مثلث ABC داریم:

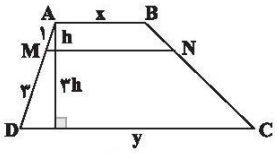


$$\frac{HH'}{BC}=\frac{AH'}{AC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{AH'}{AH'+۳x}$$

$$\Rightarrow AH'+۳x=۲AH'\Rightarrow AH'=۳x$$

$$\frac{AE}{EC}=\frac{۳x+x}{۲x}=۲$$

۲۵ **۱**



$$MN=\frac{y+۳x}{۱+۳}=۲x\Rightarrow ۸x=y+۳x\Rightarrow y=۵x$$

$$\frac{S_{MNCD}}{S_{ABNM}}=\frac{\frac{۱}{۲}(MN+DC)\times۳h}{\frac{۱}{۲}(AB+MN)\times h}=\frac{(۲x+۵x)\times۳}{x+۲x}=۷$$

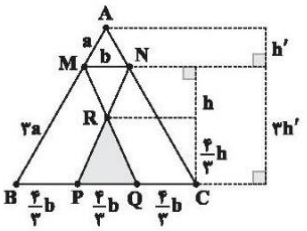
۲۶ **۲**

$$\frac{۱}{۲}=\frac{y}{x}\Rightarrow x=۲y$$

$$\frac{y-\frac{۱}{۲}}{۱}=\frac{۳}{y}\Rightarrow y^{۲}-\frac{۱}{۲}y-۳=۰$$

$$\Rightarrow ۲y^{۲}-y-۶=۰\Rightarrow y=\frac{۱\pm۷}{۴}\xrightarrow{y>۰}y=۲\xrightarrow{x=۲y}x=۴$$

۲۷ ۲



$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}h\times\frac{۴}{۳}b}{\frac{۱}{۲}\times ۴b\times ۳h'}=\frac{h}{۹h'}$$

$$h+\frac{۴}{۳}h=۳h'\Rightarrow\frac{۷}{۳}h=۳h'\Rightarrow\frac{h}{h'}=\frac{۹}{۷}\Rightarrow\frac{h}{۹h'}=\frac{۱}{۷}$$

۲۸ ۲

$$\Delta CAF: CF^۲=BC\times AC\Rightarrow ۹=۲AC\Rightarrow AC=\frac{۹}{۲}$$

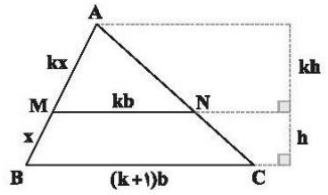
$$\Delta CAF: AF=\sqrt{AC^۲-CF^۲}=\sqrt{\frac{۸۱}{۴}-۹}=\frac{۳}{۲}\sqrt{۵}$$

$$\Delta ACE: CF^۲=AF\times FE$$

$$\Rightarrow ۹=\frac{۳}{۲}\sqrt{۵}\times EF\Rightarrow EF=\frac{۶}{\sqrt{۵}}$$

$$\frac{S_{BFC}}{S_{FDE}}=(\frac{CF}{FE})^۲=(\frac{۳}{\frac{۶}{\sqrt{۵}}})^۲=۱/۲۵$$

۲۹ ۱ اگر $AM=k.MB$ فرض شود:



$$S_{AMN}=S_{MNCB}\Rightarrow\frac{۱}{۲}kb\times kh=\frac{۱}{۲}(۲k+۱)b\times h$$

$$\Rightarrow k^۲=۲k+۱\Rightarrow k^۲-۲k-۱=۰\Rightarrow k=۱+\sqrt{۲}$$

۳۰ ۲

$$\begin{cases}(MN+BH)\times\frac{NH}{۲}=۱۰\\(MN+BH)\times AH'=۱۵\end{cases}\xrightarrow{\div}\frac{NH}{AH'}=\frac{۲۰}{۱۵}=\frac{۴}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}\frac{NH+AH'}{AH'}=\frac{۴+۳}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{\text{ارتفاع مثلث } ABC}{\text{ارتفاع مثلث } AMN}=\frac{۷}{۳}\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}=(\frac{۷}{۳})^۲=\frac{۴۹}{۹}$$